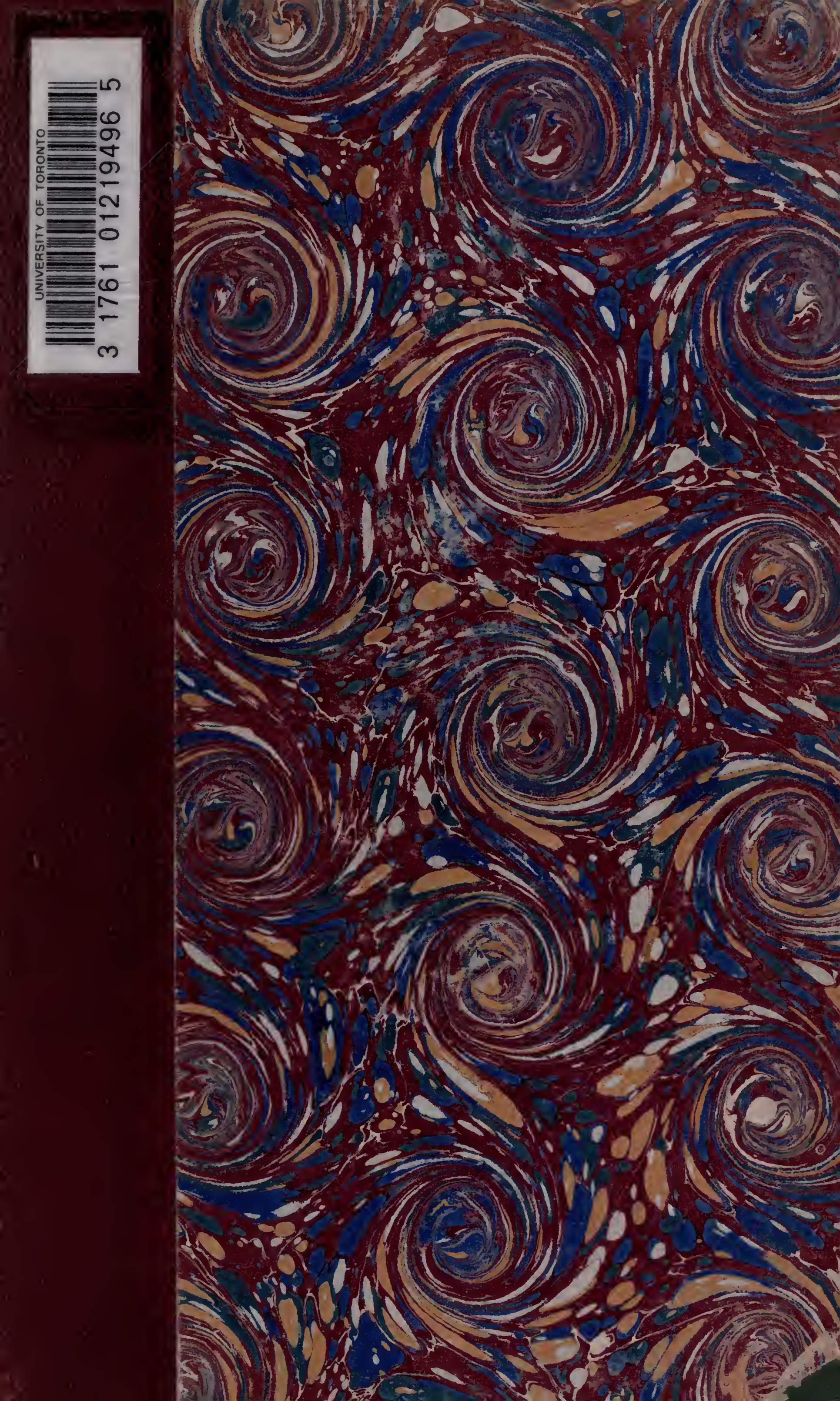
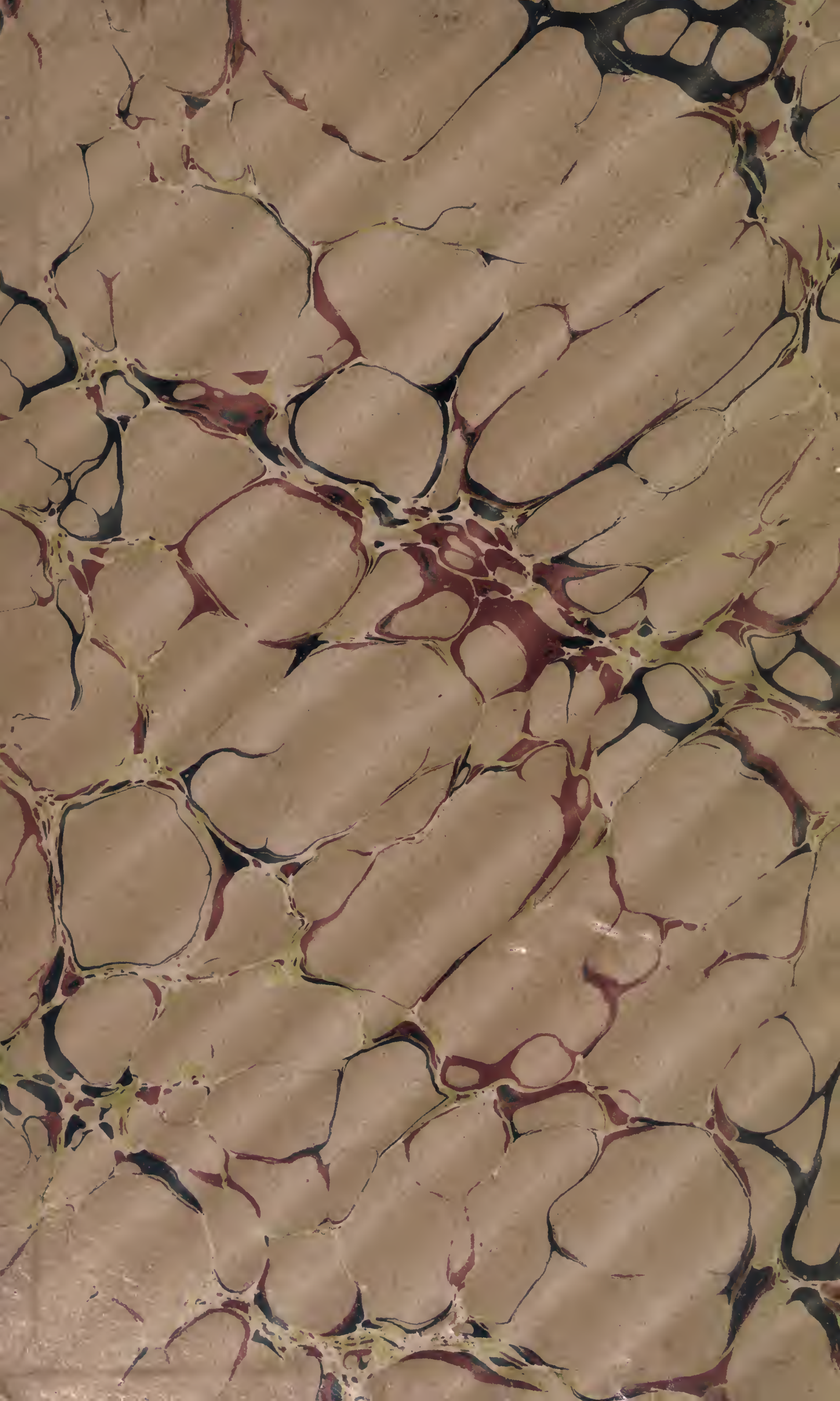
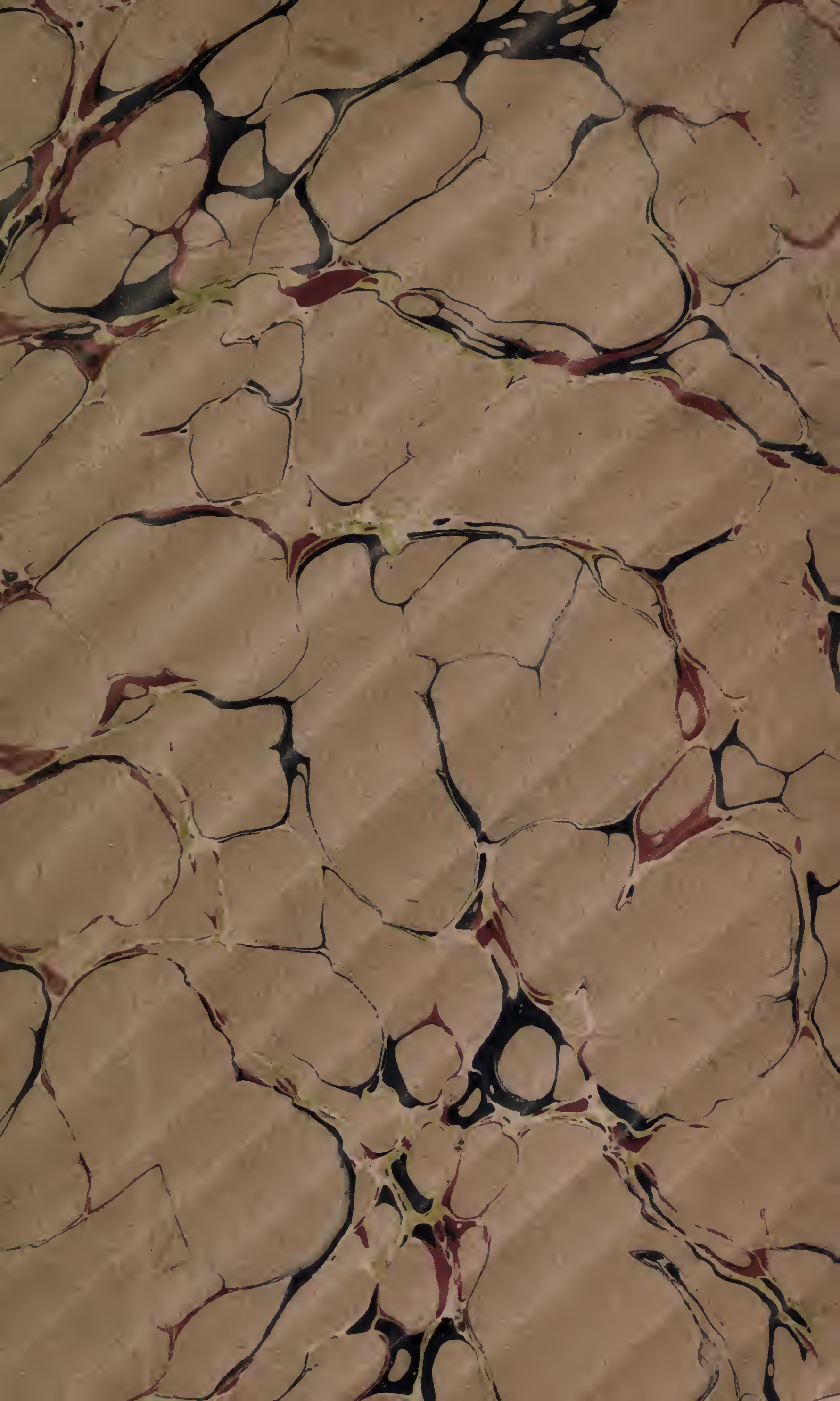

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219496 5





TRAITÉ

D'ANALYSE

15221 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathematiciens de l'Europe.
>
> De l'Hospital, *Calcul des infiniment petits*.

TOME VI.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

TRAITÉ
D'ANALYSE.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE INCONNUE.

I. — Préliminaires.

On appelle équations aux *dérivées partielles* (et quelquefois, dans les anciens auteurs, équations aux *différences partielles*) celles dans lesquelles les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables indépendantes, ces équations pouvant contenir : 1° les variables, 2° les fonctions inconnues, 3° les dérivées partielles des fonctions inconnues.

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est m quand il y entre au moins une dérivée d'ordre m d'une fonction inconnue, sans qu'il y entre de dérivée d'un ordre plus élevé.

Les solutions d'une équation ou de plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles portent le nom d'*intégrales* de cette ou de ces équations.

Les intégrales peuvent être données sous forme implicite ou sous forme explicite. La solution la plus générale d'une équation ou d'un système d'équations aux dérivées partielles porte le nom d'*intégrale générale*.

Les équations aux dérivées partielles portent aussi le nom d'*équations différentielles ;* quand il peut en résulter quelque confusion, les équations différentielles qui ne renferment pas de dérivées partielles, et qui sont celles que nous avons étudiées jusqu'à présent, portent alors le nom d'*équations différentielles ordinaires*.

La théorie des équations aux dérivées partielles comprend, dans l'état actuel de la Science, deux parties bien tranchées : la première partie est relative à la théorie des équations du premier ordre à une seule fonction inconnue ; cette partie est pour ainsi dire un complément de la théorie des équations différentielles ordinaires à plusieurs inconnues : c'est une des théories les plus parfaites du Calcul intégral ; la seconde partie, au contraire, est presque entièrement à faire, elle est encore actuellement hérissée de paradoxes et de difficultés. On sait intégrer les équations du premier ordre à une inconnue, en ce sens qu'on peut ramener leur résolution à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou à la résolution de questions encore moins compliquées. C'est à peine si l'on sait intégrer quelques équations fort simples d'ordre supérieur.

Nous nous occuperons donc spécialement, et tout d'abord, des équations du premier ordre, et en particulier des équations *linéaires*.

Une équation est *linéaire* quand les dérivées des fonctions inconnues y entrent seulement au premier degré.

II. — Méthode de Lagrange pour l'intégration des équations linéaires du premier ordre.

La théorie des équations linéaires du premier ordre est due à Lagrange [*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1779, et

Fonctions analytiques (1)]. Cette théorie a été reprise depuis par Jacobi (t. XXIII du *Journal de Crelle*, *Dilucidationes*, p. 184). Désignons par $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables indépendantes et par u une fonction inconnue de ces variables : si nous faisons

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_n,$$

et si nous désignons par $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des fonctions connues de $u, x, x_1, \ldots, x_n$, toute équation linéaire du premier ordre et aux dérivées partielles sera de la forme

$$(2) \qquad X_0 + X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Voici de quelle manière Lagrange procède pour intégrer cette équation : il observe que l'on doit avoir

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1) et (2),

$$du = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n + (X_0 + X_1 p_1 + \ldots + X_n p_n) dx,$$

ce que l'on peut écrire

$$du - X_0 dx = p_1(dx_1 + X_1 dx) + p_2(dx_2 + X_2 dx) + \ldots + p_n(dx_n + X_n dx).$$

Or, si l'on établit entre les variables $u, x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ les relations

$$dx_1 + X_1 dx = 0, \qquad \ldots, \qquad dx_n + X_n dx = 0,$$

ou

$$(3) \qquad -dx = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

l'équation précédente donnera

$$(4) \qquad dx = \frac{du}{X_0}.$$

(1) Il avait déjà traité le cas de trois variables en 1772.

Les équations (3), (4) sont des équations différentielles que l'on peut intégrer : soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ les constantes introduites par l'intégration, et soient

$$(5) \qquad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad \beta = \psi$$

les intégrales du système. Ces formules (5) auront lieu en même temps, ou l'une sera une conséquence des autres si (2) a lieu; donc ψ est constant, en vertu de (2), si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont constants; donc, en vertu de (2), ψ est une fonction de φ_1, $\varphi_2, \ldots$; donc l'intégrale de (2) est

$$F(\psi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

F désignant une fonction arbitraire.

Nous allons retrouver ce résultat par la méthode de Jacobi que nous allons exposer.

III. — Méthode de Jacobi pour l'intégration des équations linéaires et homogènes.

Jacobi étudie tout d'abord les équations linéaires et homogènes du premier ordre, par rapport aux dérivées de la fonction inconnue, dans le cas où la fonction inconnue elle-même ne figure pas dans l'équation.

La méthode de Jacobi repose sur les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour que $\varphi = c$, φ désignant une fonction de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et c une constante arbitraire, soit une intégrale des équations différentielles ordinaires*

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, il faut que φ soit une intégrale de l'équation

aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{2}$$

c'est-à-dire que l'on ait identiquement (quels que soient x, $x_1, x_2, \ldots, x_n$) (t. V, p. 15)

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial x}+X_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}=0. \tag{2 bis}$$

En effet, dire que $\varphi=c$ est une intégrale de (1), c'est dire qu'il existe n équations dont $\varphi=c$ fait partie, à savoir

$$\varphi=c,\qquad \varphi_1=c_1,\qquad \ldots,\qquad \varphi_{n-1}=c_{n-1}; \tag{3}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ désignant des constantes arbitraires telles que, si l'on en tire $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction de x et de c, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ pour porter leurs valeurs dans (1), ces équations soient satisfaites identiquement, c'est-à-dire quels que soient $x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

Tirons donc $x_1, x_2, \ldots$ et $dx_1, dx_2, \ldots$ de (3) pour les porter dans (1) : nous devrons avoir des identités. A cet effet, différentions les formules (3) pour obtenir $dx_1, dx_2, \ldots$ et nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n=0,\\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}dx_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \tag{4}$$

Au lieu de tirer $dx_1, dx_2, \ldots$ de là pour les porter dans (1), ce qui revient à éliminer $dx_1, dx_2, \ldots$, on peut remplacer $dx, dx_1, dx_2, \ldots$, dans (4), par les quantités proportionnelles $X, X_1, X_2, \ldots$, tirées de (1), ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l}X\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+X_1\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_n\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}=0,\\ X\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}+X_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+X_n\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \tag{5}$$

Ces formules, d'après ce que nous avons dit, doivent devenir identiques quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs en $x, c, c_1, \ldots, c_{n-1}$ tirées de (3). Or on peut disposer de $c, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (puisqu'ils sont arbitraires), de telle sorte que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tirés de (3) aient des valeurs données quelconques; si donc les formules (5) ont lieu quels que soient $x, c, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, elles auront lieu aussi quels que soient $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; elles constituent donc déjà un système d'identités avant que l'on ait remplacé $x_1, x_2, \ldots$ par leurs valeurs tirées de (3). Ainsi la formule (2 *bis*), en particulier, est identique. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Réciproquement, pour que* φ *soit une intégrale de* (2), *il faut que* $\varphi = c$ *soit une intégrale des équations* (1).

En effet, si φ est une intégrale de (2), il faut que l'on ait identiquement

$$(2\ bis) \qquad X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0;$$

mais, si cette formule est identique, en y remplaçant X, $X_1, \ldots$ par les valeurs proportionnelles $dx, dx_1, \ldots$, tirées de (1), on aura une conséquence nécessaire des équations (1), à savoir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n = 0$$

ou

$$d\varphi = 0;$$

ainsi, quand la formule (2 *bis*) est identique, on a $d\varphi = 0$ ou $\varphi =$ const.; mais dire que $\varphi =$ const. est une conséquence de (1), c'est dire que c'est une intégrale de (1).

C. Q. F. D.

Ainsi :

Pour que φ *soit une intégrale de* (2), *il faut et il suffit que* $\varphi =$ const. *soit une intégrale de* (1).

Remarque. — Si les constantes c n'étaient pas arbitraires, notre raisonnement perdrait toute sa force : ainsi, si, par exemple,

(3 *bis*) $$\varphi = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

constituait une solution particulière des équations (1), on aurait bien encore

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

mais non plus *identiquement*, et seulement pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tirées de (3 *bis*).

Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation aux dérivées partielles (2)

(2) $$X\frac{\partial u}{\partial x} + X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

D'après les théorèmes que nous venons de démontrer, on aura des solutions de cette équation en prenant pour u les fonctions φ qui, égalées à des constantes, constituent des intégrales du système (1)

(1) $$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n};$$

et l'on ne pourra avoir d'intégrales u de (2) qu'en prenant des fonctions qui, égalées à des constantes, constituent des intégrales de (1). Or, si

$$\varphi_1 = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ désignant des constantes arbitraires, constituent l'intégrale complète du système (1), la fonction la plus générale susceptible de rester constante en vertu de ces équations (1) sera une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; donc une fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sera la solution la plus générale de (2). Nous allons établir cette proposition d'une autre manière.

Théorème III. — *Lorsque l'on connaît i solutions ou intégrales de l'équation*

$$(1) \qquad X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

on peut toujours en trouver n — i autres, au moyen d'une équation de même espèce contenant i variables de moins.

En effet, soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$ des solutions de (1) : prenons-les pour variables à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ et désignons par un d les dérivées partielles prises en regardant $x, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ comme variables indépendantes; les formules relatives au changement de variables seront

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{du}{d\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{du}{d\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{du}{d\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{du}{d\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\frac{du}{d\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{du}{d\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}}=\frac{du}{dx_{i+1}}+\frac{du}{d\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i+1}}+\frac{du}{d\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i+1}}+\ldots+\frac{du}{d\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{i+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}+\frac{du}{d\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{du}{d\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\ldots+\frac{du}{d\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}.$$

Portant ces valeurs dans (1) ou multipliant ces équations respectivement par $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$, en ayant égard à ce que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont solutions de (1), c'est-à-dire à ce que l'on a

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} X\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

on trouve

$$0=X_{i+1}\frac{du}{dx_{i+1}}+\ldots+X_n\frac{du}{dx_n}+X\frac{du}{dx}:$$

telle est l'équation plus simple à laquelle satisfait la fonction u. L'intégrale la plus générale de cette équation doit contenir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$ d'une manière arbitraire.

Corollaire. — Supposons que l'on connaisse n intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de l'équation (1), en les prenant pour variables à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$: d'après ce que l'on vient de voir, l'équation (1) se réduira à la forme

$$X \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = 0,$$

puisqu'il ne saurait exister de relation $X = 0$ entre x_1, $x_2, \ldots, x_n, x$. On en conclut que u, exprimé en fonction de $x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, ne contient pas x; donc u est fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ seuls. Et il est facile de constater qu'une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est une solution de (1); en effet, soit $\omega = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une telle fonction; on aura

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en multipliant ces équations respectivement par X, X_1, $X_2, \ldots, X_n$ et en ajoutant, on a, en ayant égard à (2) ou à ce que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont solutions de (1),

$$X\frac{\partial\omega}{\partial x} + X_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial\omega}{\partial x_n} = 0;$$

ω est donc solution de (1), et, par suite, la solution la plus générale de (1) est une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

C. Q. F. D.

IV. — Applications diverses.

Trouver une surface dont la normale rencontre une droite fixe.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dont l'équation sera $\varphi(x, y, z) = 0$: sa normale pourra être repré-

sentée par les équations

$$X = x + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad Y = y + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad Z = z + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

la droite donnée par les suivantes

$$X = x_0 + \lambda\alpha, \qquad Y = y_0 + \lambda\beta, \qquad Z = z_0 + \lambda\gamma;$$

en exprimant que ces droites se rencontrent, on a

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ y - y_0 & \beta & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ z - z_0 & \gamma & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\varphi}{\partial x}[\beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0)] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}[\gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0)] \\ & \qquad + \frac{\partial\varphi}{\partial z}[\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0)] = 0; \end{aligned} \right.$$

l'équation $\varphi =$ const. est une intégrale du système

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{\beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0)} &= \frac{dy}{\gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0)} \\ &= \frac{dz}{\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0)} \end{aligned} \right.$$

ou une combinaison arbitraire de ses intégrales. Pour résoudre ce système, on multiplie les deux termes de chaque fraction respectivement par α, β, γ ou par $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, et l'on voit que l'on peut écrire, à la suite de chacune d'elles, les rapports égaux

$$\frac{\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz}{0}$$

et

$$\frac{(x - x_0)\, dx + (y - y_0)\, dy + (z - z_0)\, dz}{0};$$

il en résulte

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0,$$

$$(x - x_0)\, dx + (y - y_0)\, dy + (z - z_0)\, dz = 0,$$

ou bien, en intégrant,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.},$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \text{const.}$$

Telles sont les intégrales du système (2) : ce sont des intégrales de l'équation (1), et l'intégrale la plus générale de cette équation est

$$F[\alpha x + \beta y + \gamma z, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2],$$

En égalant cette solution à zéro, on a l'équation de la surface cherchée

$$F[\alpha x + \beta y + \gamma z, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0 :$$

c'est l'équation d'une surface de révolution.

V. — Intégration des équations linéaires quelconques du premier ordre à une seule fonction inconnue.

Soient x une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de la fonction inconnue x.

$$(1) \qquad X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = X$$

sera la forme la plus générale que puisse affecter une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue. Cette équation possède, comme on va le voir, des intégrales de la forme

$$(2) \qquad \varphi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c,$$

où c désigne une constante arbitraire. La méthode que nous allons exposer laisse échapper les solutions qui ne contiennent pas de constante arbitraire et que l'on a appelées *singulières;* mais elle permet, au contraire, de trouver les intégrales de la forme (2).

Si l'équation (1) admet une solution telle que (2), x tiré

de (2) rendra (1) identique, c'est-à-dire y satisfera quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la constante arbitraire c.

De (2) on tire, par la règle des fonctions implicites,

$$(2\ bis)\qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial x_2} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \qquad \ldots;$$

portons ces valeurs dans (1), il viendra

$$(3)\qquad \mathrm{X}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{X}_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \mathrm{X}_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0,$$

et cette équation, qui ne contient pas encore explicitement c, deviendra identique quand on y aura remplacé x par sa valeur tirée de (2). Mais, c étant arbitraire et (3), ayant lieu quel que soit c, quand x y est remplacé par sa valeur tirée de (2), aura encore lieu quand à la place de c on mettra une fonction arbitraire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cela revient à dire que (3) a lieu quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et aussi quel que soit x, avant que l'on ait remplacé cette fonction par sa valeur déduite de (2); mais, si (3) est identique, φ_1 est une intégrale de l'équation homogène

$$(4)\qquad \mathrm{X}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{X}_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mathrm{X}_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

que l'on sait intégrer; on obtiendra donc des solutions de (1) en égalant à des constantes arbitraires des intégrales de (4). Or les intégrales de

$$(5)\qquad \frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dx_1}{\mathrm{X}_1} = \frac{dx_2}{\mathrm{X}_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{X}_n}$$

sont des intégrales de (3) égalées à des constantes; c'est donc parmi les intégrales de (5) qu'il faudra chercher celles de (1).

Réciproquement, toute intégrale de (5) $\varphi_1 = c$ est telle que φ_1 rend la formule (3) identique; si donc de $\varphi_1 = c$ on tire x, les dérivées de x seront données par les formules (2 *bis*)

et, si l'on divise la formule (3) par $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$, elle donnera, en vertu de (2 *bis*),

$$-X\frac{\partial x}{\partial x}+X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}=0;$$

l'équation (1) sera donc satisfaite pour la valeur de x tirée de la formule (2). Ainsi, en résumé :

Toute intégrale des équations (5) est une intégrale de l'équation (1), et toute intégrale de (1) de la forme $\varphi_1=c$ est une intégrale de (5).

Soient donc

$$\varphi_1=\text{const.}=c_1,\qquad \varphi_2=\text{const.}=c_2,\qquad \ldots,\qquad \varphi_n=\text{const.}=c_n$$

les intégrales du système (5);

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=\text{const.},$$

où Φ est une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, sera la forme la plus générale d'une intégrale de (1) renfermant une constante arbitraire, que l'on peut d'ailleurs remplacer par zéro sans nuire à la généralité, puisque, Φ étant arbitraire, cette fonction pourra être censée renfermer la constante en question.

Ainsi, abstraction faite des solutions singulières, *pour intégrer l'équation* (1), *on intégrera le système* (5), *puis on égalera à zéro une fonction arbitraire des fonctions qui restent constantes en vertu des intégrales de* (5).

Autrement dit : *on posera*

$$\Phi(c_1,c_2,\ldots,c_n)=0,$$

$c_1, c_2, \ldots$ *désignant les constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale de* (5), *et l'on éliminera* c_1, $c_2, \ldots, c_n$ *entre cette équation et celles qui constituent l'intégrale générale de* (5).

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=mu,$$

m désignant une constante : on formera les équations

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu},$$

d'où l'on tire

$$x = cu^{\frac{1}{m}}, \qquad y = c'u^{\frac{1}{m}}, \qquad z = c''u^{\frac{1}{m}},$$

c, c', c'' désignant des constantes; écrivant que

$$F(c, c', c'') = 0$$

ou

$$\text{(A)} \qquad F\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{m}}}, \frac{y}{u^{\frac{1}{m}}}, \frac{z}{u^{\frac{1}{m}}}\right) = 0,$$

on aura la solution la plus générale de la question. On voit que l'on en déduit

$$u = \psi(x, y, z)$$

et

$$\psi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^m u,$$

car l'équation (A) est inaltérée par le changement de x en αx, y en αy, z en αz et u en $\alpha^m u$. La fonction u est donc homogène et de degré m; ce qu'il était facile de prévoir.

VI. — Intégration des équations aux dérivées partielles des cônes, des cylindres, des conoïdes, des surfaces de révolution.

Cônes. — En cherchant la surface dont le plan tangent passe par un point fixe, on est conduit à écrire l'équation

$$\text{(1)} \qquad p(x-a) + q(y-b) = z - c;$$

p, q désignant ici et jusqu'à la fin de ce paragraphe les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la coordonnée z d'un point de la surface, par rapport aux deux autres; a, b, c sont les coordonnées du point fixe.

Cette équation (1) est, par rapport à la fonction inconnue z,

linéaire et aux dérivées partielles; on l'intégrera en posant

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c},$$

dont les intégrales sont, en appelant α et β des constantes,

$$x - a = \alpha(z-c), \qquad y - b = \beta(z-c).$$

L'intégrale de (1) s'obtiendra en éliminant α et β entre ces deux équations et

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0,$$

ce qui donnera

$$\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0,$$

Φ étant arbitraire. Cette équation est celle d'un cône quelconque.

Cylindres. — En exprimant que le plan tangent d'une surface reste parallèle à une droite de direction a, b, 1, on a

$$(1) \qquad pa + qb = 1;$$

l'intégration de cette équation dépend de celle des équations

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

dont $x - az = \text{const.}$, $y - bz = \text{const.}$ sont les intégrales générales. L'intégrale de l'équation (1) sera donc

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0.$$

Cette équation est celle d'un cylindre quelconque ayant ses génératrices parallèles à la direction a, b, 1.

Conoïdes. — $px + qy = 0$ est l'équation d'une surface dont la projection sur le plan des xy du rayon vecteur est perpendiculaire à la trace du plan tangent; l'intégration de cette équation dépend de celles des équations

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

qui ont pour intégrales $\frac{y}{x} = \text{const.}$, $z = \text{const.}$; donc l'équation ordinaire de la surface en question est $z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, Φ étant une fonction arbitraire.

Surface de révolution. — Exprimons que la normale à une surface rencontre la droite

$$\frac{X - x_0}{a} = \frac{Y - y_0}{b} = \frac{Z - z_0}{c} = \rho.$$

La normale a pour équations

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1} = \rho';$$

la condition cherchée s'obtiendra en éliminant ρ et ρ' entre les équations

$$\begin{aligned} x_0 + a\rho &= x + p\rho', \\ y_0 + b\rho &= y + q\rho', \\ z_0 + c\rho &= z - \rho'; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x_0 - x & a & p \\ y_0 - y & b & q \\ z_0 - z & c & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} p[c(y - y_0) - b(z - z_0)] + q[a(z - z_0) - c(x - x_0)] \\ \qquad = b(x - x_0) - a(y - y_0). \end{cases}$$

Pour intégrer cette équation, on écrira les équations ordinaires

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{c(y - y_0) - b(z - z_0)} \\ &= \frac{dy}{a(z - z_0) - c(x - x_0)} = \frac{dz}{b(x - x_0) - a(y - y_0)} \\ &= \frac{(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz}{0} \\ &= \frac{a\,dx + b\,dy + c\,dz}{0}, \end{aligned}$$

qui s'intègrent immédiatement et donnent

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\text{const.},$$

$$ax+by+cz=\text{const.};$$

on en conclut que l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\Phi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\ ax+by+cz]=0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire. On reconnaît l'équation générale des surfaces de révolution, ce que l'on vérifie d'ailleurs bien facilement, en observant que les plans parallèles à $ax+by+cz=0$ coupent la surface suivant des cercles situés dans des plans $ax+by+cz=h$ et sur des sphères

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\psi(h).$$

VII. — Remarque au sujet des équations que l'on vient d'intégrer.

On a vu que la solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles homogènes était de la forme $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ étant des solutions particulières de cette équation; il est facile de prouver que, réciproquement, toute fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, susceptible d'être ramenée à la forme $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$, satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles.

En effet, soit

$$u=f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n};$$

d'où l'on conclura par l'élimination des dérivées $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n-1}}$,

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial(u, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}=0,$$

équation linéaire et homogène en u et qui exprime que u est

une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$; on peut déjà soupçonner, d'après cela, l'existence d'un facteur capable de ramener à la forme (1) toute équation aux dérivées partielles linéaire et homogène.

La solution d'une équation linéaire quelconque est donnée par une équation de la forme

$$(2) \qquad F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont des fonctions données de la fonction u et de ses variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Réciproquement, toute équation telle que (2) conduit par l'élimination de F à une équation linéaire aux dérivées partielles. En effet, différentions (2), nous aurons

$$\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} p_1\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} p_1\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} p_n\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} p_n\right) = 0, \end{array}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les dérivées partielles de u par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on élimine $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}, \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}$, entre les équations précédentes, on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} p_1 & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} p_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} p_n & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} p_n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est en apparence de degré n; mais, en combinant convenablement les colonnes par voie d'addition, la lettre p n'entrera plus que dans une seule colonne, ce qui ramènera l'équation finale au premier degré.

VIII. — Sur une manière de déterminer les fonctions arbitraires.

Théorème fondamental. — *Considérons les équations différentielles*

$$(1)\qquad \frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}.$$

Supposons qu'on les ait intégrées de telle sorte que, pour $x=a$, *les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se réduisent respectivement à* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Si l'on pose alors*

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1=f_1(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n), \\ a_2=f_2(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_i=f_i(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n), \end{cases}$$

et si entre ces équations et les intégrales de (1) *on élimine* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *on obtiendra i équations d'où l'on pourra tirer* $x_1, x_2, \ldots, x_i$ *en fonction de* $x_{i+1}, \ldots, x_n$ *et de* x. *Quand on fera* $x=a$ *dans ces relations, on trouvera*

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=f_1(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n), \\ x_2=f_2(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_i=f_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

En effet, les équations intégrales de (1), résolues par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, peuvent se représenter ainsi

$$(4)\qquad a_1=\psi_1(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x),\qquad a_2=\psi_2,\quad \ldots,\quad a_n=\psi_n.$$

Si l'on y fait $x=a$, on doit avoir

$$a_1=\psi_1(a, a_1, a_2, \ldots, a_n, a),\qquad a_2=\psi_2,\quad \ldots,\quad a_n=\psi_n.$$

Ces équations ont lieu quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qui sont par hypothèse des constantes arbitraires; donc elles auront encore lieu quand on y remplacera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on aura donc

$$(5)\qquad x_1=\psi_1(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, a),\qquad x_2=\psi_2,\quad \ldots,\quad x_n=\psi_n.$$

Maintenant, si l'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre (2) et les intégrales (4) de (1), on aura

$$\psi_1(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = f_1[\psi_{i+1}(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x), \psi_{i+2}, \ldots],$$
$$\psi_2(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = f_2[\psi_{i+1}(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x), \psi_{i+2}, \ldots],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

mais, si l'on fait $x = a$, on a, en vertu de (5),

$$x_1 = f_1(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_2 = f_2(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n), \quad \ldots,$$

ce qu'il fallait prouver.

Le théorème précédent, dû à Cauchy, est fréquemment appliqué dans la théorie des équations aux dérivées partielles, et nous allons en faire une application à la recherche d'une fonction satisfaisant à l'équation

$$(6) \qquad X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = X,$$

et se réduisant pour $x_n = a_n$ à une fonction x donnée par la formule

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0.$$

Pour intégrer l'équation (6), on intègre d'abord le système (1), puis on observe que toute relation entre les constantes d'intégration est une intégrale de (6), quand on y suppose les constantes remplacées par leurs valeurs déduites des intégrales de (1). Il en résulte que, si l'on pose

$$F(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 0,$$

l'élimination des a fournira une intégrale de (6) qui, en vertu de notre théorème fondamental, se réduira à

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

pour $x_n = a_n$.

Application. — *Trouver un cône ayant pour sommet le point a, b, c et passant par une courbe $y = \varphi(x)$ située dans le plan $z = z_0$.*

L'équation différentielle des cônes, ayant pour sommet a, b, c, est

$$z - c = p(x - a) + q(y - b), \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Pour intégrer cette équation, on forme le système

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c},$$

dont les intégrales sont

$$x - a = (x_0 - a)\frac{z-c}{z_0-c},$$

$$y - b = (y_0 - b)\frac{z-c}{z_0-c};$$

y_0 et x_0 désignant les valeurs de y et z pour $z = z_0$. Si l'on pose

$$y_0 = \varphi(x_0),$$

l'élimination de x_0 et y_0 entre cette équation et les deux précédentes donnera la solution

$$b + (y - b)\frac{z_0 - c}{z - c} = \varphi\left[a + (x - a)\frac{z_0 - c}{z - c}\right].$$

IX. — Sur les multiplicateurs des équations aux dérivées partielles.

Théorème I. — *Soit*

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathrm{X}_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

une expression dans laquelle $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ *sont des fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; *il existe au moins un facteur* μ, *tel que* $\mu\mathrm{R}$ *prenne la forme*

$$\mu\mathrm{R} = \frac{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

d'un déterminant fonctionnel, quel que soit f.

En effet, soient $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ des solutions distinctes de l'équation $R = 0$, on aura

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0;$$

de là on tire

$$X_1 : \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = X_2 : \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_3, \ldots, x_n)}, \quad \ldots$$

et, en appelant μ^{-1} la valeur de ces rapports égaux,

$$X_1 = \mu^{-1} \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})},$$
$$X_2 = \mu^{-1} \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_3, \ldots, x_n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

l'expression de R devient alors

$$R = \mu^{-1} \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)};$$

d'où l'on conclut qu'il existe un facteur μ capable de transformer μR en un déterminant fonctionnel.

Théorème II. — *Il existe une infinité de facteurs* μ.

En effet, si

$$\mu R = \frac{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

et si $F(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ désigne une fonction arbitraire de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, μF sera encore un facteur. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que F peut se mettre sous la forme

$$F = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})};$$

car on peut se donner $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ et l'équation précé-

dente aux dérivées partielles donne φ_1 ; on peut encore écrire

$$F = \frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})};$$

on a donc

$$F.\mu.R = \frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

Lemme. — *Si l'expression*

$$R = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

est un déterminant fonctionnel, on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$$

En effet, on a alors

$$X_i = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

et, en supposant

$$R = \frac{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

on a

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial \frac{\partial f_k}{\partial x_l}} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial x_i}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial \frac{\partial f_k}{\partial x_l}} + \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial \frac{\partial f_k}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial x_i}.$$

Or le coefficient de $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial x_i}$ représente un mineur du second ordre de R, diminué de lui-même (t. I, p. 165); donc

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0 \text{ (1)}.$$

---

(1) La quantité $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ est ce que l'on peut appeler un

THÉORÈME III. — *Tous les multiplicateurs* μ, *tels que*

$$\mu\left(X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\mu R$$

soit un déterminant fonctionnel exact, sont les solutions de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\mu X_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n}=0.$$

En vertu du lemme précédent, il est clair que, si μR est un déterminant fonctionnel, l'équation (1) doit avoir lieu; reste à prouver que toute solution de cette équation est un multiplicateur.

Soit λ une solution de cette équation et $\lambda\nu$ un multiplica-

---

invariant de l'équation $X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$. En général, si l'on considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1}-s & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2}-s & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n}-s \end{vmatrix}=\Theta,$$

les coefficients des diverses puissances de s et le terme indépendant de s seront des invariants; en d'autres termes, si l'on effectue sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une substitution linéaire et homogène et si l'on désigne par y_1, $y_2, \ldots, y_n$ les nouvelles variables, par $Y_1\frac{\partial u}{\partial y_1}+Y_2\frac{\partial u}{\partial y_2}+\ldots+Y_n\frac{\partial u}{\partial y_n}$ ce que devient $X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}$, le coefficient de s^i dans

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}-s & \frac{\partial Y_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_n}-s \end{vmatrix}$$

sera égal à celui de s^i dans Θ : ainsi, par exemple

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots=\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}+\frac{\partial Y_2}{\partial y_2}+\ldots.$$

teur, on aura

$$\frac{\partial(\lambda X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\lambda X_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\lambda X_n)}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda\nu X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\lambda\nu X_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\lambda\nu X_n)}{\partial x_n} = 0.$$

De ces deux équations on tire par soustraction

$$X_1 \frac{\partial\nu}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial\nu}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial\nu}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui prouve que ν est une solution de l'équation $R = 0$; mais, $\lambda\nu R$ étant un déterminant de la forme

$$\lambda\nu R = \frac{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)},$$

si l'on pose $R = 0$, on voit que toute solution de cette équation doit être une fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$; donc

$$\nu = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}).$$

On pourra donc écrire, en appelant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions de $f_1, f_2, \ldots,$

$$\nu = 1 : \frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}$$

et

$$\lambda R = \frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})} \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

ou

$$\lambda R = \frac{\partial(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})};$$

donc λ est un multiplicateur, donc enfin toutes les solutions μ de l'équation (1) sont des multiplicateurs, capables de rendre μR un déterminant fonctionnel exact quel que soit f.

En particulier, si

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

λ est un multiplicateur et R est un déterminant fonctionnel quel que soit f.

THÉORÈME IV. — *Si μ et ν sont deux multiplicateurs de l'expression*

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = R,$$

capables de la transformer en un déterminant fonctionnel, $\frac{\mu}{\nu}$ sera une solution de $R = 0$.

En effet, de

$$\frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu X_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial(\nu X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\nu X_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(\nu X_n)}{\partial x_n} = 0,$$

en multipliant la première par ν, la seconde par μ, on tire par soustraction

$$X_1\left(\nu \frac{\partial\mu}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial\nu}{\partial x_1}\right) + \ldots + X_n\left(\nu \frac{\partial\mu}{\partial x_n} - \mu \frac{\partial\nu}{\partial x_n}\right) = 0$$

ou, divisant par ν^2,

$$X_1 \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\nu}\right)}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\nu}\right)}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui établit le théorème.

X. — Principe du dernier multiplicateur.

Jacobi, à qui nous devons la théorie du multiplicateur des équations aux dérivées partielles, a fait une application remarquable de cette théorie à la recherche de la dernière intégrale d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système d'équations ordinaires, dont on connaît toutes les autres.

La théorie que nous venons d'exposer se trouve développée dans le *Journal de Crelle*, t. 27, dans les *Mathematische Werke* et dans les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi; mais la théorie suivante est extraite d'une Note de Jacobi, qui a paru au tome X du *Journal de Liouville* (1re série) : nous avons toutefois simplifié un peu le calcul de l'illustre auteur.

LEMME. — *Soient* M *un multiplicateur de l'équation aux dérivées partielles*

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

u_1 *une solution de cette équation; on a vu que la connaissance de l'intégrale* u_1 *permettait, en prenant* u_1 *à la place de* x_n *pour variable, de ramener l'équation* (1) *à la forme*

$$X_1 \frac{du}{dx_1} + X_2 \frac{du}{dx_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{du}{dx_{n-1}} = 0; \tag{2}$$

la quantité $M_1 = M : \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$ *est un multiplicateur de cette dernière équation.*

En effet, M étant un multiplicateur, on a

$$\frac{\partial MX_1}{\partial x_1} + \frac{\partial MX_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial MX_n}{\partial x_n} = 0$$

ou, remplaçant M par $M_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n}$,

$$\left(\frac{\partial M_1 X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial M_1 X_n}{\partial x_n}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + M_1 \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Si l'on différentie (1) par rapport à x_n, en y supposant $u = u_1$, on a

$$X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_n} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_n} - \ldots;$$

l'équation précédente s'écrit alors

$$(3)\quad \left(\frac{\partial M_1 X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial M_1 X_n}{\partial x_n}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} - M_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Maintenant changeons de variables, et, au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prenons $x_1, x_2, \ldots, u_1$; nous aurons

$$\frac{\partial M_1 X_1}{\partial x_1} = \frac{dM_1 X_1}{dx_1} + \frac{dM_1 X_1}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial M_1 X_n}{\partial x_n} = \ldots\ldots\ldots \frac{dM_1 X_n}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n},$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{dX_1}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule (3) devient alors

$$\left(\frac{dM_1 X_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dM_1 X_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \left(\frac{dM_1 X_1}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{dM_1 X_n}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} - M_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dX_1}{du_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{dX_2}{du_1} + \ldots\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0$$

ou, divisant par $\frac{\partial u_1}{\partial x_n}$ et développant $\frac{dM_1 X_1}{du_1}, \frac{dM_1 X_2}{du_1}, \ldots,$

$$\frac{dM_1 X_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dM_1 X_{n-1}}{dx_{n-1}} + \frac{dM_1}{du_1}\left(X_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) = 0;$$

le coefficient de $\frac{dM_1}{du_1}$ est nul, puisque u_1 est solution de (1); il reste donc

$$\frac{dM_1 X_1}{dx_1} + \frac{dM_1 X_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dM_1 X_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0,$$

ce qui prouve que M_1 est bien un multiplicateur de l'équation (2), comme nous l'avions annoncé.

Voici maintenant l'usage que l'on peut faire de ce théorème : supposons que l'on se donne l'équation (1) ou le système

équivalent d'équations ordinaires

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n};$$

quand on en connaîtra une intégrale, on la transformera dans l'équation (2) ou dans le système équivalent

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}},$$

où x_n doit y être remplacé par sa valeur tirée de l'intégrale connue $u_1 = \text{const.}$ En opérant sur l'équation (2), on fera disparaître de cette équation une nouvelle variable, et ainsi de suite. Supposons que l'on connaisse toutes les intégrales de (1) moins une, on la ramènera ainsi de proche en proche à la forme

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2 = 0,$$

équivalente à l'équation

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2}$$

ou

(5) $$X_2\, dx_1 - X_1\, dx_2 = 0.$$

Si M désigne le multiplicateur de l'équation (1), les multiplicateurs successifs des équations simplifiées seront

$$M_1 = \frac{M}{\frac{\partial u_1}{\partial x_n}}, \qquad M_2 = \frac{M_1}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}} = \frac{M}{\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}}, \qquad \ldots,$$

u_1, u_2, ... désignant les intégrales de (1). Le multiplicateur de l'équation (4) sera

$$\frac{M}{\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}}\cdots\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_3}} = \mu,$$

et l'on aura

$$\frac{\partial \mu X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu X_2}{\partial x_2} = 0;$$

μ sera donc le facteur d'intégrabilité de l'équation (5); d'où il résulte que :

Si l'on connaît un multiplicateur de l'équation (1) *et toutes ses intégrales moins une, cette dernière s'obtiendra toujours au moyen d'une simple quadrature.*

XI. — Application du principe du dernier multiplicateur.

1° Quand on aura

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

on appliquera avec succès la méthode du dernier multiplicateur, car ce dernier multiplicateur pourra être pris égal à l'unité.

2° Supposons que l'on donne une équation de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x, y);$$

la connaissance d'une seule intégrale suffira pour en trouver une seconde; en effet, l'équation précédente revient aux suivantes

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

ou bien

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\varphi},$$

c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi \frac{\partial u}{\partial y'} = 0.$$

Soit M un multiplicateur de cette équation : on aura

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M y'}{\partial y} + \frac{\partial M \varphi}{\partial y'} = 0,$$

et $M = 1$ y satisfait : il en résulte que, si l'on connaît une intégrale de l'équation proposée $u = \text{const.}$, en tirant de cette intégrale la valeur de y', l'expression

$$(y'\,dx - dy)\,\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial y'}}$$

sera une différentielle exacte, et la solution complète de l'expression proposée sera

$$u = \text{const.}$$

$$\int (y'\,dx - dy)\,\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial y'}} = \text{const.}$$

Nous ferons plus loin une application remarquable du principe du dernier multiplicateur.

Remarque. — Rappelons-nous que, étant donné un système d'équations ordinaires du premier ordre de la forme

$$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n = 0,$$

il existe des multiplicateurs qui, appliqués aux premiers membres, font de la somme de ces premiers membres une différentielle exacte. Ceci revient à dire que, si l'on considère les équations

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_2}{X_2} = 0, \qquad \frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_3}{X_3} = 0, \qquad \ldots,$$

il existe des multiplicateurs $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, tels que

$$\lambda_2\left(\frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_2}{X_2}\right) + \lambda_3\left(\frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_3}{X_3}\right) + \ldots$$

soit une différentielle exacte; ou enfin qu'il existe des multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ satisfaisant à la relation

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 0$$

et tels que

$$\frac{\mu_1\, dx_1}{X_1} + \frac{\mu_2\, dx_2}{X_2} + \ldots + \frac{\mu_n\, dx_n}{X_n}$$

soit une différentielle exacte. En effet, $\mu_1 = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n$ et $\mu_2 = -\lambda_2, \mu_3 = -\lambda_3, \ldots$, et il existe même $n - 1$ pareils systèmes de multiplicateurs; soient donc

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\mu_{11}\, dx_1}{X_1} + \dfrac{\mu_{12}\, dx_2}{X_2} + \ldots + \dfrac{\mu_{1n}\, dx_n}{X_n} = df_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\mu_{n-1,1}\, dx_1}{X_1} + \dfrac{\mu_{n-1,2}\, dx_2}{X_2} + \ldots + \dfrac{\mu_{n-1,n}\, dx_n}{X_n} = df_{n-1}; \end{cases}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ seront les intégrales du système (1) ou de l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Les formules (2) montrent que l'on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\mu_{ij}}{X_j};$$

si donc on appelle μ le multiplicateur du premier membre de (3), c'est-à-dire si l'on a

$$\mu \left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

on aura aussi

$$\mu \left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \dfrac{\mu_{11}}{X_1} & \dfrac{\mu_{12}}{X_2} & \ldots & \dfrac{\mu_{1n}}{X_n} \\ \dfrac{\mu_{21}}{X_1} & \dfrac{\mu_{22}}{X_2} & \ldots & \dfrac{\mu_{2n}}{X_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et, en égalant les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots,$

$$\mu X_1 X_2 \ldots X_n = \begin{vmatrix} \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{22} & \ldots & \mu_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots,$$

relation remarquable entre les multiplicateurs μ et μ_{ij}.

XII. — Complément des théories précédentes.

Je suppose que l'on ait

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0; \tag{1}$$

l'expression

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \tag{2}$$

est un déterminant fonctionnel; en d'autres termes, il existe des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant aux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = X_1, \\ &\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_3, \ldots, x_n)} = X_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} = X_n. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Il s'agit maintenant de trouver ces fonctions ou d'intégrer le système (3) : nous prouverons, en résolvant cette question, qu'en supposant l'équation (1) satisfaite, l'expression (2) est un déterminant fonctionnel, et cela plus directement que ne l'a fait Jacobi.

Soit u_i l'une quelconque des fonctions $u_1, u_2, \ldots$: multiplions les équations (3) respectivement par $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \ldots$ et

ajoutons-les ; nous aurons

$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui prouve que $u_1, u_2, \ldots$ sont des solutions de l'équation linéaire

$$(4) \qquad X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Soient donc $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, $n-1$ solutions indépendantes de cette équation ; $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ pourront s'exprimer en fonction de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, et l'on aura

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})} \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})}{\partial(x_2, \ldots, x_n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ce qui permet d'écrire, au lieu de (3),

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})} &= X_1 : \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})}{\partial(x_2, \ldots, x_n)} \\ &= X_2 : \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si nous faisons abstraction du premier membre de cette suite d'égalités, et si nous désignons par $B_1, B_2, \ldots$ les déterminants qui dans (5) servent de dénominateurs à $X_1, X_2, \ldots$, nous aurons

$$\frac{\partial\left(\frac{X_1}{B_1}, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\right)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \frac{\partial \frac{X_1}{B_1}}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial \frac{X_2}{B_2}}{\partial x_2} B_2 + \ldots$$
$$= \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots - \frac{X_1}{B_1}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \ldots\right).$$

Or $B_1, B_2, \ldots$ étant des déterminants fonctionnels, on a

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \ldots = 0;$$

alors, en vertu de (1), le dernier membre de ces égalités sera nul et l'on aura

$$\frac{\partial\left(\frac{X_1}{B_1}, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\right)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

et $\frac{X_1}{B_1}, \frac{X_2}{B_2}, \cdots$ seront fonctions de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$; le déterminant $\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})}$ pourra donc se calculer en fonction de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. On pourra satisfaire à (5) ou à (3) en choisissant $u_2, \ldots, u_{n-1}$ arbitrairement, et l'on aura, en appelant H la suite des rapports (5), l'équation linéaire

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})} = H;$$

pour calculer u_1, on peut prendre $u_2 = \omega_2, \ldots, u_{n-1} = \omega_{n-1}$, et alors il viendra

$$\frac{\partial u_1}{\partial \omega_1} = H, \qquad u_1 = \int H\, d\omega_1 + \text{fonct.}(\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}),$$

et le problème sera résolu. Si $\omega_2, \omega_3, \ldots$ se réduisent pour $x_1 = x_1^0$ à des fonctions données de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, il en sera de même de leurs égaux $u_2, u_3, \ldots$ et u_1 pour $\omega_1 = \omega_1^0$ se réduira à une fonction donnée de $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$.

XIII. — Théorème sur les multiplicateurs.

Soient F *une fonction de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et de* α; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *des fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pouvant aussi renfermer le paramètre* α. *Si, pour une valeur particulière de* α, *ou si, quel que soit* α, *on a*

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial X_n}{\partial \alpha},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\varphi(F)\left(X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right] = 0,$$

pour une forme de la fonction $\varphi(F)$, *la quantité* $\varphi(F)\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$, *sera un multiplicateur de l'équation*

$$(3) \qquad X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

En effet, l'équation (2) étant développée donne

$$\varphi'(F)\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) + \varphi(F)\left(X_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha} + \ldots + X_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial \alpha}\right)$$
$$+ \varphi(F)\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial X_n}{\partial \alpha}\right) = 0$$

ou, en vertu de (1),

$$\varphi'(F)\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) + \varphi(F)\left(X_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha} + \ldots + X_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial \alpha}\right)$$
$$+ \varphi(F)\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial\left[\varphi(F)\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}X_1\right]}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\left[\varphi(F)\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}X_n\right]}{\partial x_n} = 0.$$

ce qui prouve bien que $\varphi(F)\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$ est un multiplicateur.

EXERCICES ET NOTES.

1. Intégrer l'équation

$$(ax + by + cz)\frac{\partial u}{\partial x} + (a'x + b'y + c'z)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+ (a''x + b''y + c''z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

où a, b, ... désignent des constantes.

2. Intégrer l'équation suivante, où φ est une fonction quelconque

$$y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\varphi(z),$$

et prouver qu'elle représente toutes les surfaces réglées à plan directeur.

3. Intégrer

$$\left(y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x+y) = z(x-y).$$

4. Les équations

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad y' = \frac{dy}{dt}, \qquad z' = \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}, \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

où μ est une constante et où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ont pour intégrales

$$y'z - z'y = a, \qquad z'x - x'z = b, \qquad x'y - y'z = c,$$

$$x'(xx' + yy' + zz') - x(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{\mu x}{r} = \alpha,$$

$$y'(xx' + yy' + zz') - y(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{\mu y}{r} = \beta,$$

$$z'(xx' + yy' + zz') - z(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{\mu z}{r} = \gamma;$$

mais ces équations ne sont pas distinctes et se réduisent à cinq. On propose d'appliquer à l'intégration du système en question le principe du dernier multiplicateur.

5. Prouver que la sphère est la seule surface dans laquelle le plan tangent soit normal au rayon vecteur issu d'un point fixe.

6. Trouver l'équation générale des surfaces dans lesquelles la normale est perpendiculaire au rayon vecteur issu d'un point fixe.

7. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; trouver une fonction u, telle que l'on ait

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = f_n$$

et montrer que la question peut être résolue au moyen d'une quadrature.

8. Trouver l'équation des surfaces, telles que la longueur de la normale comptée à partir du point d'incidence jusqu'au plan des xy soit égale à la distance de l'origine au pied de la normale sur le plan des xy.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES ÉQUATIONS QUELCONQUES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE INCONNUE.

I. — Classification des solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Il sera bientôt démontré qu'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$E = 0,$$

dans laquelle E désigne une fonction quelconque de la fonction inconnue u, de ses variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de ses dérivées $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$, admet une solution qui, pour $x_n = x_n^0$, x_n^0 étant une constante arbitraire, se réduit à une fonction arbitraire des autres variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Une pareille solution porte le nom d'*intégrale générale.*

Toute solution qui se déduit de l'intégrale générale, en particularisant la forme de la fonction arbitraire dont dépend cette intégrale, porte le nom d'*intégrale particulière.*

Toute solution qui n'est pas l'intégrale générale ou une intégrale particulière est une *intégrale singulière.*

Toute solution renfermant n constantes arbitraires, c'est-à-dire un nombre de constantes arbitraires égal au nombre de variables dont la fonction inconnue u dépend, a reçu de Lagrange le nom d'*intégrale complète.*

Par extension, on a donné le nom d'*intégrale générale,* d'*intégrale particulière,* d'*intégrale singulière*, d'*intégrale complète,* à une équation entre la fonction inconnue et ses variables, d'où l'on peut tirer par de simples opérations

algébriques, c'est-à-dire sans effectuer d'intégrations, une intégrale générale, particulière, singulière ou complète.

Ainsi, par exemple, si l'équation

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots$ sont des constantes arbitraires, définit une valeur de u satisfaisant à $E = 0$, quels que soient x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on dira que cette équation $F = 0$ est une intégrale complète de l'équation $E = 0$.

Disons enfin que k constantes arbitraires ne doivent être considérées comme distinctes, que si, pour $x_1 = x_1^0, \ldots$ $x_n = x_n^0$, elles permettent de choisir arbitrairement u et $k - 1$ dérivées de cette fonction.

II. — Des intégrales complètes.

Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$E = 0.$$

Entre la fonction inconnue u, les n variables $x_1, x_2, \ldots$, x_n dont elle dépend, et ses dérivées $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$. Une intégrale complète de cette équation, étant une intégrale contenant n constantes arbitraires, se présentera généralement sous la forme

$$(1) \qquad F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des constantes arbitraires. Dans ce qui va suivre nous ferons d'abord abstraction du cas où les dérivées de F, ou celles de u relatives à $x_1, \ldots, x_n$ seraient infinies ou indéterminées.

Théorème I. — *Si entre l'intégrale complète* (1) *et ses dérivées totales*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on trouve l'équation proposée $E = 0$.

En effet, dire que (1) est une intégrale complète de $E = 0$, c'est dire que, si l'on en tire u et ses dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pour les porter dans $E = 0$, cette équation se trouve satisfaite identiquement; en d'autres termes, si l'on tire u, p_1, $p_2, \ldots, p_n$ de

$$\text{(A)} \quad F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

pour les porter dans $E = 0$, cette équation est satisfaite identiquement, c'est-à-dire quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Or $E = 0$ ne contient pas les a; donc $E = 0$ a lieu en même temps que (A); c'est une conséquence nécessaire des équations (A), ne contenant plus $a_1, a_2, \ldots, a_n$; c'est donc la résultante provenant de l'élimination de a_1, $a_2, \ldots$ entre les équations (A). C. Q. F. D.

Mais $E = 0$ ne sera la résultante des équations (A) qu'autant que les constantes a seront distinctes, c'est-à-dire telles que ces équations aient *effectivement* une résultante *unique;* s'il n'en était pas ainsi, on ne considérerait pas $F = 0$ comme une intégrale complète.

Théorème II. — *Quand on connaît une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, on peut toujours en déduire, par la méthode de la variation des constantes, la solution la plus générale.*

En effet, en choisissant convenablement $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on pourra toujours faire en sorte que l'équation (1) fournisse pour u une fonction donnée à l'avance f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il suffira pour cela de poser

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, f) = 0,$$

et de se donner à volonté $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$: l'équation précédente fera alors connaître a_n.

Proposons-nous alors de satisfaire à l'équation aux dérivées

partielles proposée en choisissant convenablement $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et en les regardant non plus comme des constantes, mais comme des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on tire de la formule (1), en la différentiant à ce point de vue, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dx_1}+\dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dx_1}+\ldots=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dx_2}+\dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dx_2}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ces équations se réduiraient aux formules

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F}{\partial u}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial F}{\partial u}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui donnent $p_1, p_2, \ldots$, quand on suppose $a_1, a_2, \ldots$, constants si l'on avait

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dx_1}+\dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dx_1}+\ldots+\dfrac{\partial F}{\partial a_n}\dfrac{da_n}{dx_1}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dx_2}+\dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dx_2}+\ldots+\dfrac{\partial F}{\partial a_n}\dfrac{da_n}{dx_2}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les valeurs de $u, p_1, p_2, \ldots$, tirées de (1) et (3), satisferaient à l'équation proposée, puisque par hypothèse, en tirant $u, p_1, p_2, \ldots$ de ces équations pour les porter dans la proposée, celle-ci devient identique, quels que soient $a_1, a_2, \ldots$, et cela quand ils sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots$, aussi bien que quand ils sont constants.

Ainsi l'équation (1) constituera encore une intégrale de la proposée si les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfont aux formules (4). On peut résoudre ces équations de plusieurs manières.

1° On peut supposer $\dfrac{da_1}{dx_1}=0, \ldots, \dfrac{da_i}{dx_j}=0, \ldots$, alors

$a_1, a_2, \ldots$ sont des constantes et l'on retrouve la solution complète d'où l'on était parti.

2° On peut supposer

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0;$$

ces n équations, quand elles sont compatibles, déterminent des systèmes de valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaisant à la question : on obtient donc une intégrale ordinairement *singulière* en éliminant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre (1) et (5).

Mais il n'est pas besoin de supposer que $\frac{\partial F}{\partial a_1}, \frac{\partial F}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_n}$ soient tous nuls, pour satisfaire aux équations (4) : on peut supposer

$$(6) \qquad \frac{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0;$$

le déterminant du système (4) étant nul, ces équations (4) rentrent alors plus ou moins les unes dans les autres, et d'ailleurs la formule (6) montre que l'on doit supposer des relations entre les a.

Supposons d'abord

$$(7) \qquad a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1});$$

alors $\frac{\partial F}{\partial a_i}$ devra être remplacé par $\frac{\partial F}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$, que nous désignerons, pour abréger, par $\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\right)$; les formules (4) deviendront alors

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right)\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}\right)\frac{da_{n-1}}{dx_1} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right)\frac{da_1}{dx_2} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}\right)\frac{da_{n-1}}{dx_2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on y satisfera en posant

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}\right) = 0.$$

Les équations (7) et (8) feront alors connaître $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et, en éliminant ces paramètres entre (7), (8) et (1), on aura la solution dite *générale* renfermant la fonction arbitraire φ. L'élimination ne pourra ordinairement qu'être indiquée.

On peut aussi supposer plus d'une relation entre les fonctions a et faire

$$(9) \quad a_n = \varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_i), \qquad \ldots, \qquad a_{i+1} = \varphi_{i+1}(a_1, \ldots, a_i).$$

Si l'on pose alors

$$\frac{\partial F}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F}{\partial a_{i+1}} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial a_\mu} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_\mu} = \left(\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\right),$$

on est conduit à calculer les a au moyen des formules (9) et des suivantes

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\right) = 0.$$

Je dis maintenant que nous avons ainsi la solution la plus générale. En effet, appelons $u = V$ la solution complète déduite de (1), en supposant $a_1, a_2, \ldots$ constants, et soit $u = W$ la solution la plus générale ou, si l'on veut, une solution bien déterminée, mais quelconque. On peut poser $W = V$, à la condition de supposer, comme nous l'avons dit, les a variables et convenablement choisis; $n - 1$ d'entre eux d'ailleurs peuvent être pris arbitrairement; nous les déterminerons par les équations suivantes

$$(10) \qquad \frac{\partial W}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_{n-1}} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_{n-1}}\right),$$

où $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$ est une dérivée prise en laissant les a constants. Or, si dans l'équation proposée on remplace u et ses dérivées par $V, \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$, on obtient une identité, d'où l'on peut tirer une équation de la forme

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = \psi\left[V, \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial V}{\partial x_{n-1}}\right)\right].$$

Si, dans la même équation proposée, on substitue à la place de u et de ses dérivées W, $\frac{\partial W}{\partial x_1}$, $\cdots$, on a aussi une identité, d'où l'on tire évidemment

$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = \psi\left(W, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial x_{n-1}}\right);$$

mais, comme l'on suppose $V = W$, on voit que, les formules (10) ayant lieu, il faut que l'on ait aussi

$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right). \tag{11}$$

Maintenant différentions l'égalité $W = V$; nous aurons

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_1},$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_2} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces formules, en vertu de (10) et (11), se réduisent aux formules (4), dont elles ne diffèrent que par la forme, car les formules (4) prennent bien la forme

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_1} = 0, \qquad \ldots$$

quand on suppose $F = 0$ de la forme $V - u = 0$; les a ne peuvent donc être déterminés autrement que nous ne l'avons fait. (La théorie précédente est de Lagrange, *Œuvres,* t. III et IV.)

Il résulte de cette théorie que les équations linéaires n'ont pas de solutions singulières, et, en effet, si l'on considère l'équation

$$X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = X, \tag{a}$$

et si l'on appelle

$$\varphi_1 = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n$$

les intégrales du système

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

l'intégrale générale de (a) sera

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

ou tout au moins peut-on affirmer que ce sera *une* des intégrales de l'équation (a); il en résulte que

$$(b) \qquad a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad F = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des constantes arbitraires, est une solution complète. Or les solutions singulières s'obtiennent en déterminant $a_1, a_2, \ldots$, au moyen des équations $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots$, qui ne sauraient fournir de valeurs pour a_1, $a_2, \ldots$, vu qu'elles ne contiennnent pas ces variables.

Il est facile de s'assurer aussi que les solutions complètes de la forme (b) appartiennent exclusivement aux équations linéaires, et, en effet, en éliminant $a_1, a_2, \ldots$ entre (b) et ses dérivées

$$\left(a_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(a_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \ldots\right) = 0,$$
$$\left(a_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial x}{\partial x_2} + \left(a_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \ldots\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a une relation linéaire en $\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \cdots$ (LAGRANGE, *Mémoires de Berlin*, 1772-1774).

Nous ferons observer, en terminant, que, si l'on donne une équation, telle que (1),

$$(1) \qquad F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots a_n) = 0,$$

en éliminant les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre cette équation et celles que l'on obtient en la différentiant par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et en y considérant u comme fonction de $x_1, \ldots, x_n$,

on obtiendra une équation différentielle du premier ordre $E = 0$, dont (1) sera une solution complète, mais qui aura une solution plus générale que l'on pourra déduire de (1).

III. — Remarques au sujet des théories précédentes.

Nos conclusions sont subordonnées à l'existence d'une solution complète, et dans ce paragraphe nous admettrons, non seulement l'existence d'une solution complète, mais, ce qui sera bientôt prouvé, l'existence d'une solution générale se réduisant à une fonction arbitraire de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour $x_n = x_n^0$. Mais nos raisonnements supposent essentiellement les dérivées dont nous avons fait usage finies et bien déterminées; il est bon d'observer que, en supposant les p infinis ou mal déterminés, nos conclusions pourraient tomber en défaut, et des solutions singulières pourraient s'introduire à la suite d'hypothèses telles que $\frac{\partial E}{\partial u} = \infty$, $\frac{\partial E}{\partial x_i} = \infty$, ...; les équations linéaires elles-mêmes ne sont pas exemptes de pareilles solutions, que l'on peut appeler *intégrales singulières de seconde espèce,* en réservant le nom d'*intégrales singulières de première espèce* aux intégrales régulièrement déduites des solutions complètes, comme il a été dit plus haut.

Il est clair que, quand on connaît une intégrale générale, on peut, et cela d'une infinité de manières, en déduire une intégrale complète, en particularisant la forme de la fonction arbitraire dont elle dépend.

Toute intégrale particulière contenant moins de constantes arbitraires qu'une intégrale complète peut se déduire d'une certaine intégrale complète en donnant des valeurs particulières à des constantes de cette intégrale complète.

En effet, toute intégrale particulière θ se déduit de l'intégrale générale Θ, en particularisant la forme de cette dernière;

si dans θ on suppose $x_n = x_n^0$ par exemple, cette fonction se réduira à θ^0, en sorte que θ est la forme particulière que prend Θ quand on veut que, pour $x_n = x_n^0$, cette solution générale se réduise à θ^0. Soient $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ des constantes dont le nombre ajouté au nombre des constantes contenues dans θ fasse n; la fonction Θ, déterminée de manière à se réduire à

$$\theta^0 + \varphi,$$

pour $x_n = x_n^0$, φ désignant une fonction nulle, par exemple, pour $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, ..., sera une intégrale complète dont θ sera un cas particulier, celui où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ...

Nous allons maintenant essayer de reconnaître si une intégrale donnée est particulière ou singulière. La méthode que nous allons indiquer est loin d'être rigoureuse, mais elle permettra d'affirmer, dans certains cas, qu'une solution donnée est particulière en faisant découvrir l'intégrale générale.

Si une solution

$$u = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est particulière, on la déduira d'une intégrale complète, telle que

$$u = \theta + a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2 + \ldots + a_n\varpi_n,$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ pouvant contenir les constantes arbitraires, en faisant $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{E}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta + a_1\varpi_1 + \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_1} + a_1\frac{\partial\varpi_1}{\partial x_1} + \ldots, \ldots\right) = 0,$$

ou par la formule de Taylor, *si elle est applicable,*

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E} + a_1\left(\varpi_1\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial\theta} + \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\varpi_1}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial p_n}\right)\\ &\quad + a_2\left(\varpi_2\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial\theta} + \frac{\partial\varpi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial\varpi_2}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial p_n}\right)\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\end{aligned}\right.$$

Le terme E est nul, puisque θ est solution de $\mathrm{E} = 0$; les

termes du premier ordre en $a_1, a_2, \ldots$ sont nuls; donc

$$\varpi_i \frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_1} \frac{\partial E}{\partial p_1} + \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_2} \frac{\partial E}{\partial p_2} + \ldots = 0;$$

pour que les fonctions ϖ existent, ces équations aux dérivées partielles linéaires devront être compatibles; cela aura généralement lieu, et il faudra en outre que les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients des termes d'ordre supérieur en $a_1, a_2, \ldots$ dans (A) aient lieu également.

IV. — Application des principes précédents.

Il y a une foule de cas dans lesquels on peut deviner une intégrale complète : considérons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad p_n = f(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1});$$

on y satisfait évidemment en posant

$$(2) \quad u - u_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n f(a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

$u_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ désignant des constantes; c'est la solution complète de l'équation (1). Si l'on prend la dérivée par rapport à u_0, on a $1 = 0$; il n'y a donc pas de solution singulière. Remplaçons alors u_0 par $\varphi(a_1, \ldots, a_{n-1})$: nous aurons

$$(3) \quad u = a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n f(a_1, \ldots, a_n) + \varphi(a_1, \ldots, a_n),$$

et $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ se calculeront par les formules dérivées de celle-ci par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 + x_n \dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \\ x_2 + x_n \dfrac{\partial f}{\partial a_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Considérons encore l'équation

$$z = px + qy + f(p, q),$$

analogue à l'équation de Clairaut où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$(1) \qquad z = ax + by + f(a, b);$$

est évidemment une intégrale complète. Cette équation représente un plan, la solution générale s'obtiendra en éliminant a entre (1) et sa dérivée

$$o = x + b'y + \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} b',$$

relative à a, en y considérant b comme fonction de a. La solution générale représentera donc une infinité de surfaces développables qui dépendent de la forme adoptée pour b. Enfin l'on obtiendra une solution singulière en différentiant (1) successivement par rapport à a et b et en éliminant ces variables entre (1) et ses dérivées, ce qui fournit une surface ayant pour plan tangent le plan représenté par (1).

En résumé, (1) est l'équation du plan tangent d'une surface en fonction de ses coefficients directeurs, et si l'on veut, il en est de même de l'équation proposée. La solution singulière, la plus importante, est l'équation de la surface en question, et la solution la plus générale est représentée par toutes les développables circonscrites à la surface en question, puisque ces développables sont des enveloppes quelconques du plan tangent à cette surface.

L'équation

$$(1) \qquad f_1(p_1, x_1) + f_2(p_2, x_2) + \ldots + f_n(p_n, x_n) = \mathrm{H},$$

dans laquelle H désigne une constante, s'intègre assez facilement comme il suit. Posons

$$f_1(p_1, x_1) = a_1,$$

a_1 désignant une constante arbitraire, cette équation peut être considérée comme aux dérivées ordinaires, et l'on peut supposer que l'on en ait tiré

$$u_1 = \varphi_1(x_1);$$

l'équation (1) deviendra alors

$$(2) \qquad f_2(p_2, x_2) + \ldots + f_n(p_n, x_n) = \mathrm{H} - a_1.$$

Posant encore

$$f_2(p_2, x_2) = a_2,$$

a_2 désignant une nouvelle constante arbitraire, on en tirera pour u une valeur telle que $u_2 = \varphi_2(x_2)$, et la formule (2) donnera

$$f_3(p_3, x_3) + \ldots + f_n(p_n, x_n) = \mathrm{H} - a_1 - a_2;$$

enfin l'on aura $u_n = \varphi_n(x_n)$, en désignant par u_n la fonction qui satisfait à $f_n(p_n, x_n) = \mathrm{H} - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}$. Considérons maintenant la fonction

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \text{const.}$$

Si dans (1) on porte cette valeur de u, comme $u_2, \ldots, u_n$ ne contiennent pas x_1, p_1 se réduira à $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $f(p_1, x_1)$ se réduira à a_1, etc., et l'équation (1) sera satisfaite.

L'équation

$$f_1(p_1, x_1) + \varphi_1(p_1, x_1) f_2(p_2, x_2) = \mathrm{H}$$

se résoudrait d'une façon analogue.

V. — Application géométrique.

Problème. — *Trouver une surface dont les normales rencontrent une courbe fixe.*

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point de la courbe fixe et x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dont la normale passe en α, β, γ; en posant $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, on a

$$x - \alpha + p(z - \gamma) = 0,$$
$$y - \beta + q(z - \gamma) = 0,$$

α et β désignant des fonctions données de γ; ces deux équations équivalent au fond à une équation unique aux dérivées partielles dont on a une solution en posant

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2,$$

R désignant une constante ainsi que γ et, par suite, ainsi que α et β. Cette équation constitue une solution complète de la question; en supposant R fonction de γ et en éliminant γ entre cette équation et

$$(2) \qquad (x-\alpha)\alpha'+(y-\beta)\beta'+(z-\gamma)=RR',$$

on aura la solution générale du problème. L'ensemble des deux équations (1), (2) représente l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe donnée. En supposant $R=$ const., on a une surface canal.

VI. — Quelques équations intégrées par Euler.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad z=pq,$$

où

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

On a

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

ou bien, en vertu de (1),

$$dz=\frac{z}{q}\,dx+q\,dy;$$

on en déduit

$$dy=\frac{dz}{q}-\frac{z}{q^2}\,dx=d\left(\frac{z}{q}\right)-\frac{z}{q^2}\,dx+\frac{z}{q^2}\,dq;$$

on en tire

$$d\left(y-\frac{z}{q}\right)=-\frac{z}{q^2}\,dx+\frac{z}{q^2}\,dq=\frac{z}{q^2}(-dx+dq),$$

donc

$$d\left(y-\frac{z}{q}\right)=\frac{z}{q^2}(dq-dx)=\frac{z}{q^2}d(q-x);$$

par suite, F désignant une fonction arbitraire,

$$(2)\qquad y-\frac{z}{q}=F(q-x),$$

donc

$$d\left(y-\frac{z}{q}\right)=F'(q-x)d(q-x),$$

donc

$$(3)\qquad \frac{z}{q^2}=F'(q-x).$$

En éliminant q entre (2) et (3), on a la solution; mais ceci a besoin d'être vérifié, car on ne saurait affirmer que F soit arbitraire. Considérons les équations

$$y-\frac{z}{\alpha}=F(\alpha-x),$$

$$\frac{z}{\alpha^2}=F'(\alpha-x),$$

et cherchons à quelle équation différentielle satisfait z quand on élimine α. A cet effet, considérons α comme défini par la seconde équation; on aura, en différentiant la première,

$$-\frac{p}{\alpha}+\frac{z}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx}=F'(\alpha-x)\left(\frac{d\alpha}{dx}-1\right),$$

$$1-\frac{q}{\alpha}+\frac{z}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{dy}=F'(\alpha-x)\frac{d\alpha}{dy};$$

remplaçant $F'(\alpha-x)$ par $\frac{z}{\alpha^2}$, on a

$$-\frac{p}{\alpha}=-\frac{z}{\alpha^2}\qquad\text{ou}\qquad z=\alpha p,$$

$$1-\frac{q}{\alpha}=\quad 0\qquad\text{ou}\qquad \alpha=q;$$

on en conclut par l'élimination de α

$$z=pq.$$

Considérons encore l'équation $xy = pq$: si l'on pose

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q} = v,$$

on a

$$dz = p\,dx + q\,dy = v\,x\,dx + \frac{y}{v}\,dy,$$

$$dz = d\left(\frac{v x^2}{2} + \frac{y^2}{2v}\right) - dv\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2v^2}\right)$$

ou

$$d\left(z - \frac{v x^2}{2} - \frac{y^2}{2v}\right) = dv\left(\frac{y^2}{2v^2} - \frac{x^2}{2}\right);$$

donc

$$z - \frac{v x^2}{2} - \frac{y^2}{2v} = \mathrm{F}(v),$$

$$\frac{y^2}{2v^2} - \frac{x^2}{2} = \mathrm{F}'(v).$$

L'élimination de v entre ces équations donnera l'intégrale cherchée.

VII. — Forme simple à laquelle on peut toujours ramener une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

dans laquelle x est la fonction inconnue, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les dérivées relatives aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut toujours la remplacer par une autre qui ne renferme plus explicitement la fonction inconnue x, mais seulement ses dérivées.

Première méthode. — On désignera par

(2) $$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

une intégrale de (1) renfermant une constante arbitraire c; on en déduira

$$p_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \dots, \quad p_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} : \frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

si l'on tire p_1, p_2, ... de là pour les porter dans (1), on aura

$$(3) \quad f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, x, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \dots\right) = 0;$$

cette formule, par définition même du mot *intégrale*, doit être une identité, si l'on y suppose x remplacé par sa valeur déduite de (2). En d'autres termes, elle a lieu quel que soit c, et, par suite, en remplaçant c par une fonction arbitraire; cela revient à dire qu'elle a lieu quel que soit x, et, par suite, elle est actuellement identique. Or cette équation (3) est une équation aux dérivées partielles par rapport à φ, qui ne contient pas φ autrement que par ses dérivées. Quand φ sera connu (et nous apprendrons à le calculer) en l'égalant à une constante, on aura une intégrale de (1).

Cette méthode déjà exposée à propos des équations linéaires a l'inconvénient (bien faible il est vrai) de laisser échapper les solutions qui ne renferment pas de constante contrairement à notre hypothèse. [*Dilucidationes* (*Crelle*, t. 23).]

Deuxième méthode. — Jacobi a présenté une autre méthode qui n'est pas soumise au même inconvénient. Voici en quoi elle consiste. [*Nova methodus* (*Œuvres de Jacobi*) et *Vorlesungen ueber Dynamik.*]

Posons

$$(4) \qquad u = tx, \qquad x = \frac{1}{t}u,$$

t désignant une nouvelle variable, nous aurons

$$(5) \qquad \frac{\partial x}{\partial x_i} = p_i = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = x;$$

donc x et ses dérivées s'exprimeront en fonction des dérivées de la fonction u, et l'équation (1) prendra la forme

$$(6) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Il est clair que toute solution de l'équation (1) peut être représentée par $\frac{u}{t}$ et satisfera à (6); mais, comme M. Bertrand l'a observé, la réciproque n'aura pas lieu et toute solution de (6) ne satisfera pas à (1) quand on l'aura divisée par t, ce dont on peut se rendre compte en observant que, pour satisfaire à (1), $\frac{u}{t}$ doit être indépendant de t. Si d'ailleurs $\frac{u}{t}$ est indépendant de t, il satisfera à (1).

On a répondu à l'objection, fort juste d'ailleurs, de M. Bertrand. Soit

$$(7) \qquad u = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, t)$$

une solution de l'équation (6) : dire que $u = \theta$ est une solution de (6), c'est dire que l'on a identiquement

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{1}{t}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \ldots\right) = 0,$$

c'est-à-dire quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et t. Cette relation, ayant lieu quel que soit t, aura encore lieu si, à la place de t, on met une fonction quelconque des autres variables ou même une constante arbitraire; elle aura donc lieu, en particulier, si l'on suppose t défini par l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = x \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = x;$$

ceci revient à dire que si de (7) on tire u, après y avoir remplacé t par sa valeur tirée de (8), cette valeur de u satisfera encore à (6), ou, ce qui revient au même, en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial t}$ par x, à

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Mais $\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_1}$ est alors égal à $\frac{\partial\left(\frac{u}{t}\right)}{\partial x_1}$ etc., et l'équation (1) est satisfaite; donc, en résumé, étant connue une intégrale (7) de (6), pour en déduire une de (1), on déterminera t par l'équation (8). Si l'intégrale de (6) se présente sous la forme

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x, t) = 0,$$

on éliminera t entre cette équation et

$$x\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

après avoir remplacé u par tx.

VIII. — Intégration d'une équation aux dérivées partielles quelconque du premier ordre.

Nous pouvons, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, faire disparaître d'une équation aux dérivées partielles la fonction inconnue elle-même : cela fait, nous pouvons supposer l'équation résolue par rapport à l'une des dérivées; ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre pourra toujours se ramener à la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

u désignant la fonction inconnue des variables x, x_1, x_2, ..., x_n, et p_1, p_2, ..., p_n ses dérivées relatives à x_1, x_2, ..., x_n; alors f sera une fonction quelconque de x, x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n ne contenant pas u.

L'équation (1) sera intégrée si l'on peut découvrir pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et u des fonctions telles que l'expression

$$(2) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n + f\,dx$$

soit une différentielle exacte; l'intégrale de cette différentielle sera alors la fonction u.

Pour résoudre le problème qui nous occupe, changeons de variables, et, désignant par α_1, α_2, ..., α_n des fonctions

actuellement indéterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et x, considérons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonctions de x et de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ces quantités seront nos nouvelles variables. Demander que l'expression (2) soit une différentielle exacte, c'est demander que l'on ait à la fois

$$\frac{du}{dx} = p_1 \frac{dx_1}{dx} + p_2 \frac{dx_2}{dx} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dx} + f,$$

$$\frac{du}{d\alpha_i} = p_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{d\alpha_i},$$

pour toutes les valeurs de i comprises de 1 à n; ou, plus simplement, si l'on convient de représenter par un d les différentielles prises en faisant varier x seul et en laissant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constants, et par un δ les différentielles prises en laissant x constant et en faisant varier $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, c'est demander que l'on ait à la fois

$$du = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n + f\, dx, \tag{3}$$

$$\delta u = p_1\, \delta x_1 + p_2\, \delta x_2 + \ldots + p_n\, \delta x_n. \tag{4}$$

Soient $u^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ les valeurs de u $p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour $x = x^0$, ces valeurs seront, bien entendu, des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. L'équation (3) est équivalente à

$$u = u^0 + \int_{x^0}^{x} (p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n + f\, dx), \tag{5}$$

et l'on tire de celle-ci

$$\delta u = \delta u^0 + \int_{x^0}^{x} (\delta p_1\, dx_1 + \ldots + \delta p_n\, dx_n + p_1\, \delta\, dx_1 + \ldots + p_n\, \delta\, dx_n + \delta f\, dx)$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\left\{\begin{aligned} \delta u = {} & \delta u^0 + p_1\, \delta x_1 + \ldots + p_n\, \delta x_n - p_1^0\, \delta x_1^0 - \ldots - p_n^0\, \delta x_n^0 \\ & + \int_{x^0}^{x} \Big[\delta p_1\, dx_1 + \ldots + \delta p_n\, dx_n - dp_1\, \delta x_1 - \ldots - dp_n\, \delta x_n \\ & \qquad + dx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial f}{\partial p_1} \delta p_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \delta p_n \right) \Big]. \end{aligned}\right.$$

On voit par là que les formules (2) et (3) seront satisfaites toutes deux, si l'on prend

$$\delta u^0 = p_1^0\,\delta x_1^0 + \ldots + p_n^0\,\delta x_n^0 \tag{7}$$

et si l'on annule la quantité placée sous le signe $\int$ dans la formule précédente (6), u se calculant d'ailleurs par la formule (5). Or on pourra annuler la quantité placée sous le signe $\int$ dans (6), en posant séparément égal à zéro le coefficient de chaque différentielle δx_1, δx_2, ..., δp_1, δp_2, ...; on aura ainsi le système suivant d'équations dites *canoniques* :

$$dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\,dx = 0, \qquad dp_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx = 0,$$
$$dx_2 + \frac{\partial f}{\partial p_2}\,dx = 0, \qquad dp_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1}{dx} = -\dfrac{\partial f}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dx} = -\dfrac{\partial f}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

Adjoignons à ces équations la formule (3) *qui donne du : supposons ces équations intégrées; les constantes d'intégration seront des fonctions de* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; *nous supposerons l'intégration effectuée de telle sorte que pour* $x = x^0$ *on ait* $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, u = u^0, p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0, \ldots$; *nous poserons*

$$\left\{\begin{array}{l} u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ p_1^0 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_1^0}, \quad p_2^0 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_2^0}, \quad \ldots, \quad p_n^0 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_n^0}, \end{array}\right. \tag{9}$$

puis entre les intégrales de (8), (3) *et les formules* (9), *nous éliminerons* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0, u^0$; *nous obtiendrons ainsi des équations qui feront connaître les* p *et la fonction* u, *de sorte qu'en éliminant aussi les* p,

on aura u et cela sous une forme telle qu'elle se réduira à $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *pour* $x = x^0$.

En effet, en posant les formules (9) et en éliminant x_1^0, $x_2^0, \ldots, p_1^0, p_2^0, \ldots, u^0$, on sait que l'on obtient pour u, p_1, $p_2, \ldots, p_n$ des fonctions qui pour $x = x^0$ se réduisent à $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et à ses dérivées (p. 19). En second lieu, les fonctions $u, p_1, \ldots, p_n$ ainsi déterminées satisfont au système (8), (3), bien entendu, puisque ce sont des intégrales de ce système, et comme, en vertu de (9), on a

$$\delta u^0 = p_1^0\,\delta x_1^0 + \ldots + p_n^0\,\delta x_n^0, \tag{7}$$

la formule (6) se réduit à

$$\delta u = p_1\,\delta x_1 + \ldots + p_n\,\delta x_n,$$

c'est-à-dire à (4); or (9) est une conséquence de (3) déjà vérifiée, donc (3) et (4) sont aussi vérifiées; en d'autres termes, l'équation (1) est intégrée.

Plus généralement, *intégrons le système* (8), (3) *de manière que pour* $x = x^0$ *on ait* $x_i = x_i^0, p_i = p_i^0$, $u = u^0$, *posons*

$$\left\{\begin{aligned} & u^0 = \varpi(x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), \\ & p_i^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_i^0}, \quad \ldots, \quad p_n^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_n^0}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

entre les équations et les intégrales de (8), (3), *éliminons* $p_1, p_2, \ldots, u^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0$, *nous avons encore une intégrale de* (1), *moins générale que la précédente, mais qui se réduira à* $\varpi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *pour* $x = x^0$, $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{i-1} = x_{i-1}^0$.

Si entre les intégrales de (8), (3) *on élimine* $p_1^0, \ldots$, p_n^0 *et* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *la résultante fera connaître u en fonction de* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0$ *et de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; *ce sera une solution complète de* (1) *renfermant les constantes* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Pour le voir, il suffit de supposer $p_1^0 = \alpha_1, \ldots, p_n^0 = \alpha_n$; $\delta x_1^0 = 0, \ldots, \delta x_n^0 = 0$; l'équation

$$\delta u^0 = p_1^0\,\delta x_1^0 + \ldots + p_n^0\,\delta x_n^0$$

est satisfaite et les intégrales de (8) et (3) feront alors connaître u, les x et les p en fonction des $p^0 = \alpha$; l'élimination de ces $p^0 = \alpha$ fera alors connaître u et les p, ou u seul si l'on élimine aussi les p en fonction des arbitraires x_1^0, ... et de $x_1, \ldots, x_n$.

Malheureusement ce dernier procédé est illusoire dans des cas très nombreux, par exemple, toutes les fois que l'équation (1) est homogène en $p_1, p_2, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}$, parce que alors

$$(3) \qquad du = p_1 dx_1 + \ldots + f\,dx$$

peut s'écrire

$$\frac{du}{dx} = -p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} - \ldots + f;$$

mais f étant homogène et du premier degré, il reste

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

l'une des intégrales du système (8), (9) est alors $u =$ const., l'élimination des p_0 est alors impossible; mais, si l'on désire une intégrale complète, on peut la trouver en donnant une forme particulière avec n constantes arbitraires à la fonction ϖ et en appliquant la première méthode.

J'ai dit que cette dernière méthode tombera souvent en défaut, et en effet on obtient une équation homogène, quand, partant d'une équation qui contient la fonction inconnue elle-même, on cherche à la faire disparaître en la remplaçant par une autre fonction φ telle que $\varphi =$ const., soit une intégrale de l'équation proposée.

Nous allons maintenant faire une application de nos méthodes.

IX. — Application.

Intégrer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} = pq,$$

ou

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il faudra poser

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt;$$

on en déduira

$$(1) \qquad \begin{cases} p = p^0; \quad q = q^0, \quad x = x^0 + q^0(t - t_0), \\ \qquad\qquad y = y^0 + p^0(t - t^0). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$u = \int 3p^0 q^0 \, dt + u^0,$$

$$u^0 = \varpi(x_0, y_0), \qquad p^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x^0}, \qquad q^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial y^0},$$

on aura u, en éliminant p^0 et q^0 p, q, x^0 et y^0 entre

$$u = 3p^0 q^0 (t - t_0) + \varpi(x_0, y_0),$$

$$p^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x^0}, \qquad q^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial y^0}$$

et les formules (1).

X. — Premier perfectionnement apporté à la methode précédente.

On peut intégrer l'équation

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

dans laquelle F est fonction des variables x_1, x_2, ..., x_n et des dérivées de la fonction inconnue u de ces variables

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

lorsque u n'y entre pas, sans avoir besoin de la résoudre d'abord par rapport à l'une des dérivées.

En effet, supposons théoriquement l'équation (1) résolue par rapport à p_n et mise sous la forme

$$(2) \qquad p_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}).$$

On intégrera cette équation : 1° en posant les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \dfrac{dx_i}{dx_n} = -\dfrac{\partial f}{\partial p_i}, \\ du = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} p_i\, dx_i + f\, dx_n; \end{cases}$$

2° en les intégrant de telle sorte que, pour $x_n = x_n^0$, on ait $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$, $u = u^0$; 3° entre les intégrales et

$$(4)\qquad u^0 = \varpi(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0), \qquad p_i^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i^0},$$

on éliminera $u^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, p_1^0, \ldots, p_{n-1}^0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, et la résultante fera connaître u. Le théorème des fonctions implicites permet de tirer de (1) les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial p_i}$ ou $\dfrac{\partial p_n}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial p_n}{\partial p_i}$ en les portant dans (3), les formules peuvent s'écrire

$$\frac{dp_i}{dx_n} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} : \frac{\partial F}{\partial p_n}, \qquad \frac{dx_i}{dx_n} = \frac{\partial F}{\partial p_i} : \frac{\partial F}{\partial p_n},$$

$$du = \sum p_i\, dx_i + p_n\, dx_n;$$

mais, p_n étant censé tiré de (1), il faut adjoindre (1) à ces équations qui peuvent s'écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{-dp_1}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)} = \dfrac{-dp_2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)} = \ldots = \dfrac{-dp_n}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)} = \dfrac{dx_1}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\right)} \\ \qquad = \dfrac{dx_2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial p_2}\right)} = \ldots = \dfrac{dx_n}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial p_n}\right)} \\ \qquad = \dfrac{du}{p_1 \dfrac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial F}{\partial p_2} + \ldots + p_n \dfrac{\partial F}{\partial p_n}}. \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes à (3), mais il ne faut pas oublier d'y adjoindre $F = 0$, d'où p_n est censé tiré; enfin nous y avons ajouté pour la symétrie le membre $\dfrac{-dp_n}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)}$, qui

fournit une équation rentrant dans les autres, en vertu de l'équation $d\mathrm{F}=0$, ou

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_1}dp_1+\ldots+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_n}dp_n=0,$$

que l'on obtient en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des rapports (5) multipliés par des facteurs évidents.

Ainsi : *Pour intégrer l'équation* (1), *on formera les équations* (5), *on les intégrera de telle sorte que pour* $x_n=x_n^0$ *on ait* $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $\ldots$, $x_{n-1}=x_{n-1}^0$, $p_1=p_1^0$, $\ldots$, $p_{n-1}=p_{n-1}^0$, $u=u^0$, *en se servant de* $\mathrm{F}=0$ *pour éliminer* p_n [*et en observant que le système* (5) *est surabondant*]; *après quoi on éliminera entre les intégrales et*

$$u^0=\varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$

$$p_1^0=\frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0}, \qquad p_2^0=\frac{\partial\varpi}{\partial x_2^0}, \qquad \ldots, \qquad p_{n-1}^0=\frac{\partial\varpi}{\partial x_{n-1}^0},$$

les x^0, u^0, *les* p^0 *et les* p. *La résultante fournira alors pour* u *une fonction qui pour* $x_n=x_n^0$ *se réduira à une fonction* $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ *des autres variables.*

XI. — Second perfectionnement de la méthode précédente.

Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles quelconque, pouvant contenir la fonction inconnue. Soit

$$(1)\qquad \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n; x, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0$$

cette équation, dans laquelle F est une fonction donnée de la fonction inconnue x, de ses variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et des dérivées $p_1=\frac{\partial x}{\partial x_1}, \ldots, p_n=\frac{\partial x}{\partial x_n}$.

Pour intégrer l'équation (1), nous poserons

$$u = tx \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1}{t}u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x, \qquad \frac{\partial x}{\partial x_i} = p_i = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_i};$$

cette équation deviendra

$$(2) \qquad F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Si nous parvenons alors à intégrer cette nouvelle équation, de telle sorte que sa solution soit de la forme tx, x ne contenant pas t, x sera l'intégrale de l'équation (1) : c'est ce que nous allons essayer de faire (p. 54). A cet effet, posons, pour abréger, $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = q_i$; l'équation (1) s'écrira

$$(3) \qquad F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; q, \frac{1}{t}q_1, \ldots, \frac{1}{t}q_n\right) = 0.$$

Posons encore

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i;$$

pour intégrer (3), il faudra poser, d'après le paragraphe précédent,

$$(4) \quad \begin{cases} F = 0, \\ -\dfrac{dq_1}{X_1} = \ldots = -\dfrac{dq_n}{X_n} = \dfrac{t^2\,dq}{P_1q_1 + \ldots + P_nq_n} \\ \qquad = \dfrac{t\,dx_1}{P_1} = \ldots = \dfrac{t\,dx_n}{P_n} = \dfrac{dt}{X} = \dfrac{t\,du}{P_1q_1 + \ldots + P_nq_n + tqX}, \end{cases}$$

et l'une de ces équations est une conséquence des autres; $F = 0$ seule doit être forcément conservée. Il faut intégrer ces équations de telle sorte que pour $x_1 = x_1^0$ on ait $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, $u = u^0$, $q_2 = q_2^0$, $\ldots$, $q_n = q_n^0$, $t = t^0$; après quoi l'on posera

$$(5) \quad \begin{cases} u^0 = \varpi(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ q_i^0 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_i^0}, \end{cases}$$

et l'on éliminera les q, les q^0, les x^0 et u^0. Je dis que l'on peut faire en sorte que $u = tx$, x étant indépendant de t. En effet, changeons de variable et posons pour intégrer le système (4)

$$q_i = tp_i;$$

ce système deviendra

$$F = 0,$$

$$\frac{-dp_1}{X_1 + p_1 X} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n X} = \frac{-dq}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}$$
$$= \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dt}{tX} = \frac{du}{t(P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n) + Xqt}$$

ou encore

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & F = 0, \\ & \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 X} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n X} = \frac{-dq}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} \\ & \qquad = \frac{dt}{tX} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}, \\ & du - d(qt) = 0. \end{aligned} \right.$$

On intégrera ces équations, de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, x_i se réduise à x_i^0, u à u^0 et p_i à p_i^0 ; il faudra ensuite éliminer q, les x^0, les p^0, u^0 et les p entre les intégrales et

$$(7) \qquad u^0 = \varpi(x_2^0, \ldots, x_n^0), \qquad p_i^0 t^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i^0}.$$

On peut dès à présent éliminer q ; il suffit de remarquer que de $du = d(tq)$ on tire $\frac{u}{t} = q$, et le système (6) peut être remplacé par le suivant où l'on n'a pas écrit $\frac{dt}{tX}$,

$$F = 0,$$

$$\frac{-dp_1}{X_1 + p_1 X} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n X} = \frac{-d\left(\frac{u}{t}\right)}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}$$
$$= \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n},$$

et les calculs conduiront à une valeur de $\frac{u}{t}$ indépendante de t

que l'on peut appeler x, si l'on remplace l'arbitraire u^0 par $\frac{u^0}{t^0}$; on ser aconduit à la règle suivante :

Pour intégrer l'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

formez les équations

$$F = 0,$$

$$-\frac{dp_1}{X_1 + p_1 X} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + P_n X} = \frac{dx}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}$$
$$= \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n},$$

intégrez-les de telle sorte que les constantes d'intégration soient des valeurs particulières $x_2^0, \ldots, p_2^0, \ldots$ *des variables, puis, entre les intégrales et les équations suivantes où* ϖ *est une fonction arbitraire*

$$x^0 = \varpi(x_2^0, \ldots, x_n^0), \qquad p_i^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i^0},$$

éliminez les p, *les* p^0, *les* x^0 *vous aurez l'intégrale générale cherchée. Elle se réduira à* $\varpi(x_2, \ldots, x_n)$ *pour* $x_1 = x_1^0$.

Tel est le résultat auquel Cauchy était parvenu en 1819, mais par une voie un peu différente que nous indiquerons plus loin.

XII. — Étude des équations canoniques. Théorème de Jacobi.

Nous avons vu que l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f(p_1, p_2, \ldots, p_n; x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se ramenait à l'intégration des équations

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0, \qquad \frac{dp_i}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Ces équations (qui sont celles du mouvement en Mécanique), ont reçu le nom d'*équations canoniques;* elles jouissent de propriétés curieuses dont l'étude fera l'objet de ce paragraphe et des suivants.

Première propriété : Théorème de Jacobi. — *Quand on connaît une intégrale complète u de l'équation aux dérivées partielles,* (1) *renfermant les n constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (*outre celle qui doit y entrer sous forme additive*), *on peut en déduire les intégrales des équations canoniques* (2), *ces intégrales sont*

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}=p_1,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial u}{\partial x_n}=p_n,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_n}=\beta_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *désignant de nouvelles constantes.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire voir qu'en éliminant les constantes entre (3), (4) on retombe sur les équations canoniques. A cet effet, observons que, si l'on désigne par un d une différentielle relative à la seule variable x, et par un δ une différentielle prise en faisant seulement varier $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, on aura

$$(5)\qquad d\,\delta u=\delta\, du;$$

or on a

$$\delta u=\sum p_i\,\delta x_i+\sum \beta_i\,\delta\alpha_i,$$

$$(6)\qquad d\,\delta u=\sum dp_i\,\delta x_i+\sum p_i\,\delta\, dx_i;$$

d'un autre côté,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{dx_i}{dx}\,dx$$

ou bien, en vertu de (1) et (3),

$$du = f\,dx + \sum p_i \frac{dx_i}{dx}\,dx,$$

$$\delta\,du = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta x_i\,dx + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\delta p_i\,dx + \sum \delta p_i \frac{dx_i}{dx}\,dx + \sum p_i\,\delta\,dx_i.$$

Comparant cette formule avec (5) et (6), on a

$$(6\,bis) \qquad \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{dp_i}{dx}\right)\delta x_i + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{dx_i}{dx}\right)\delta p_i = 0.$$

Cette formule a lieu quels que soient les δx_i et les δp_i, car $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, ...; $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$, ... sont arbitraires; il en résulte que les coefficients de δx_i et δp_i sont nuls, ce qui fournit les équations canoniques; donc, etc. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Considérons l'équation*

$$(7) \qquad f\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = h,$$

où h est une constante arbitraire : si l'on en connaît une solution renfermant $n-1$ arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ et h, les intégrales des équations

$$(8) \qquad \frac{dx_i}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0, \qquad \frac{dp_i}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

seront

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = p_1, & \ldots, & \dfrac{\partial v}{\partial x_n} = p_n, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \ldots, & \dfrac{\partial v}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, & \dfrac{\partial v}{\partial h} = -x + x_0. \end{cases}$$

En effet, v étant une solution de (7), $u = v - hx$ sera une solution de

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, x_1, \ldots, x_n\right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial(u-hx)}{\partial x_i} = p_i, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial(u-hx)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial(u-hx)}{\partial h} = x_0,$$

ou les équations (9) seront des intégrales de (8).

Les théorèmes de Jacobi ne sont pas seulement curieux, ils ont rendu d'immenses services à la Science. Les équations du mouvement en Mécanique se ramènent le plus souvent à la forme canonique, et, dans un grand nombre de cas, l'équation aux dérivées partielles est plus facile à intégrer que les équations canoniques qui lui correspondent. Pour faire une application du théorème de Jacobi, considérons les équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{q}{x^2}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{r}{x^2 y^2},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q^2}{x^3} + \frac{r^2}{x^3 y^2}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{r^2}{x^2 y^3}, \qquad \frac{dr}{dt} = 0,$$

dans lesquelles $-p$, $-\frac{q}{x^2}$, $-\frac{r}{x^2 y^2}$, $\frac{q}{x^3} + \frac{r^2}{x^3 y^2}$, $\frac{r^2}{x^2 y^3}$, 0 sont les dérivées de la fonction

$$-\frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{x^2} q^2 + \frac{1}{x^2 y^2} r^2\right).$$

Pour intégrer ces équations, il suffira d'avoir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + \frac{1}{x^2} q^2 + \frac{r^2}{x^2 y^2} = -2h,$$

où

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Or il est facile d'avoir cette intégrale en posant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \alpha^2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{y^2} = \beta^2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\beta^2}{x^2} = -2h;$$

α, β, désignant des constantes, on en retire

$$u = \alpha z + \int_{y_0}^{y} \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}}\, dy + \int_{x_0}^{x} \sqrt{-\frac{\beta^2}{x^2} - 2h}\, dx,$$

et les intégrales des équations données seront

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = r,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial u}{\partial h} = -t + \tau,$$

α', β', τ désignant de nouvelles constantes.

XIII. — Cas où le théorème de Jacobi est en défaut.

Conservons les notations et le numérotage des formules du paragraphe précédent. Il est clair que le théorème de Jacobi ne sera plus applicable si les équations (3) et (4) ne permettent pas de calculer les p et les x en fonction des α et des β, en d'autres termes, si le système (3), (4) est incompatible ou indéterminé; on ne pourra plus en effet considérer les δx et les δp comme arbitraires et les formules (2) ne sont plus des conséquences forcées de (6 *bis*).

Voici un exemple du cas que nous venons de signaler :

Je suppose que des équations canoniques (2) on puisse déduire des intégrales ne contenant ni les p ni les p^0, valeurs des p pour $x = x^0$. Soient x_1^0, x_2^0, ... les valeurs de x_1, x_2, ..., pour $x = x^0$: on a vu que l'on pouvait trouver une solution complète de (1) en éliminant les p et les p^0 entre les intégrales de (2) et

$$u = u^0 + \int_{x^0}^{x} (p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n + f\, dx).$$

Je dis que, cette solution complète étant connue, on ne peut pas lui appliquer le théorème de Jacobi. En effet, différentions l'équation précédente par rapport aux constantes x_1^0, ..., p_1^0, ...; nous aurons, comme on l'a déjà vu,

$$\delta u = \delta u^0 + \sum p\, dx - \sum p^0\, \delta x^0 - \int \sum (dp\, \delta x - \delta p\, dx + \delta f\, dx).$$

Si l'on suppose les équations canoniques satisfaites et $\delta u^0 = 0$, on aura

$$(1) \qquad \delta u = \sum p\,\delta x - \sum p^0\,\delta x^0,$$

d'où l'on déduira, comme conséquences des équations canoniques, si les δx et les δx^0 sont arbitraires,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i^0} = p_i^0;$$

et par suite, ces équations sont les intégrales des équations canoniques. Mais, s'il existe des relations entre les x et les x^0, c'est-à-dire s'il existe des intégrales des équations canoniques ne contenant pas les p ni les p^0, cette conclusion sera inexacte; on peut tourner la difficulté. Soient, par exemple,

$$\begin{gathered}
\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_1^0, x_2^0, \ldots) = 0,\\
\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_1^0, x_2^0, \ldots) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_1^0, x_2^0, \ldots) = 0
\end{gathered}$$

k relations entre les x et les x^0 faisant partie des intégrales des équations canoniques, et supposons qu'il n'existe pas d'autres relations entre les x et les x^0; on aura

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}\,\delta x + \sum \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x^0}\,\delta x^0 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

En éliminant k des variations δx, δx^0 entre (1) et (2), on pourra égaler à zéro les variations restantes; cette élimination peut se faire par la méthode des multiplicateurs, et, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des indéterminées, on aura

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x_i} - p_i + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial u}{\partial x_i^0} - p_i^0 + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i^0} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i^0} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{gathered}$$

l'élimination des λ fournira des intégrales des équations cano-

niques; ces intégrales jointes à $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, ... constitueront le système complet de ces intégrales.

XIV. — Sur une application du théorème de Jacobi.

Le théorème de Jacobi permet, étant donnée une intégrale complète de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

d'en déduire une intégrale se réduisant pour $x = x^0$ à une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet, de cette intégrale complète on déduit, comme on l'a vu, au moyen de simples différentiations, les intégrales des équations canoniques d'où l'on déduit l'intégrale demandée de l'équation (1).

Il est clair que cette conclusion est exacte lors même que la solution complète ne donne pas explicitement u : en effet, si elle se présente sous la forme

$$F(u, x_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) = 0,$$

les équations (3) et (4) du paragraphe précédent qui font connaître les intégrales des équations canoniques seront remplacées par les suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + \beta_1 \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

qui leur sont équivalentes.

XV. — Théorème de Donkin et de Poisson.

Nous ferons souvent usage d'une notation introduite par Poisson et qui simplifie l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous poserons

$$(1) \qquad (\alpha, \beta) = \sum \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x_i, p_i)}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \quad (\alpha, \beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\frac{\partial \beta}{\partial p_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_1}\frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\frac{\partial \beta}{\partial p_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_2}\frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \ldots.$$

L'intégration des équations canoniques

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

peut se ramener à celle de l'équation aux dérivées partielles suivantes, où φ désigne la fonction inconnue,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu des notations (1),

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (f, \varphi);$$

si donc α est une intégrale des équations (2), on aura

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = (f, \alpha),$$

et, si cette intégrale ne contient pas x, on aura $(f, \alpha) = 0$. Cette formule est un cas particulier d'un théorème remarquable dû à Poisson et que nous allons démontrer.

Dans la suite nous emploierons la locution « l'intégrale α » au lieu de « l'intégrale $\alpha =$ const. » pour abréger le langage.

Théorème de Donkin. — *Si l'on pose*

$$(4) \qquad (\beta, \gamma) = a, \qquad (\gamma, \alpha) = b, \qquad (\alpha, \beta) = c,$$

on aura

$$(5) \qquad (\alpha, a) + (\beta, b) + (\gamma, c) = 0;$$

en effet l'on a

$$(\alpha, a) + (\beta, b) + (\gamma, c)$$
$$= \sum\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) + \sum\left(\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial \beta}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial x_i}\right) + \ldots$$

ou, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs (1),

$$\begin{aligned}\sum\Bigg[&\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\sum\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma}{\partial p_j}-\frac{\partial\beta}{\partial p_j}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}\right)\\ &-\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma}{\partial p_j}-\frac{\partial\beta}{\partial p_j}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}\right)\Bigg]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ =\sum\Bigg(&\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_j\partial p_i}\frac{\partial\gamma}{\partial p_j}+\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\frac{\partial^2\gamma}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2\beta}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}\\ &-\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\beta}{\partial p_j}\frac{\partial^2\gamma}{\partial p_i\partial x_j}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\gamma}{\partial p_j}\\ &-\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\frac{\partial^2\gamma}{\partial p_j\partial x_i}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_i\partial p_j}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial\beta}{\partial p_j}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i\partial x_j}\Bigg)+\ldots\end{aligned}$$

Or il est facile de s'assurer que tous les termes de cette expression se détruisent deux à deux. Prenons, par exemple, le terme $\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}$; il entrera dans le développement de (β, b) et dans celui de (γ, c); dans le premier développement le coefficient de $\frac{\partial\beta}{\partial x_i}$ sera positif, dans le second celui de $\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}$ sera négatif; nos deux termes se détruiront donc.

C. Q. F. D.

Théorème de Poisson. — Soient α et β deux intégrales des équations canoniques ou de (3), on aura (si aucune d'elles n'est égale à f)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=(f, \alpha),\qquad \frac{\partial\beta}{\partial x}=(f, \beta). \tag{6}$$

Si l'on pose

$$(\alpha, \beta)=c, \tag{7}$$

on aura, par le théorème de Donkin,

$$[\alpha, (\beta, f)]+[\beta, (f, \alpha)]+[f, (\alpha, \beta)]=0$$

ou, en vertu de (6) et (7),

$$\left(\alpha, -\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\left(\beta, \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+(f, c)=0$$

ou

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}, \alpha\right) + \left(\beta, \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + (f, c) = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta, \alpha) + (f, c) = 0$$

ou encore

$$-\frac{\partial c}{\partial x} + (f, c) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial c}{\partial x} = (f, c);$$

ce qui montre que c est une solution de (3) (pouvant se réduire à une constante déterminée ou une intégrale des équations canoniques) : on en conclut le théorème de Poisson.

Si la quantité α était précisément la fonction f, quoique $f =$ const. soit une intégrale des équations canoniques, on n'aurait pas $\frac{\partial f}{\partial x} = (f, c)$, (α, f) serait cependant nul si la fonction α ne contenait pas x explicitement ; on a, en effet,

$$(f, \alpha) = \frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

et

$$(f, \alpha) = 0,$$

si α ne contient pas x explicitement.

Mais, avant de formuler le théorème de Poisson, observons : 1° que la quantité $c = (\alpha, \beta)$ peut très bien se réduire à une constante proprement dite et satisfaire à l'équation (3) qui admet de telles solutions ; pour cette raison, (α, β) ou c ne devra pas être considérée comme faisant connaître une intégrale nouvelle.

2° La quantité $(\alpha, \beta) = c$ pourra très bien n'être qu'une fonction de α, β ou d'intégrales déja connues. Ainsi, pour la double raison que nous venons de donner, le théorème de Poisson n'aura pas l'importance que Jacobi paraissait lui

attribuer. Quoi qu'il en soit, le théorème de Poisson pourra être utile, fournir même des intégrales nouvelles, et n'en est pas moins un des plus beaux théorèmes du Calcul intégral. Nous l'énoncerons de la façon suivante :

Si α et β sont deux intégrales des équations canoniques, l'expression (α, β) se réduira à une constante quand on cherchera à l'exprimer en fonction de x seul.

Quand les équations canoniques sont celles du mouvement, l'expression (α, β) ne varie pas avec le temps.

La démonstration qu'on vient de lire n'est pas celle de Poisson, et, avant que Donkin ait fait connaître son théorème, Cauchy avait déjà donné une démonstration très simple du théorème de Poisson.

XVI. — Théorèmes de Lagrange et de Cauchy; nouvelle démonstration du théorème de Poisson.

Reprenons les équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \tag{1}$$

si nous appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ les constantes qui entrent dans les intégrales de ces équations, on pourra considérer les α comme fonctions des x et des p, ou les p et les x comme fonctions des α. Nous poserons alors avec Lagrange

$$[\alpha_i, \alpha_j] = -[\alpha_j, \alpha_i] = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_j} \right), \tag{2}$$

alors on aura

$$[\alpha_i, \alpha_i] = 0; \tag{3}$$

nous ferons toujours avec Poisson

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -(\alpha_j, \alpha_i) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_\mu} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_\mu} \right), \tag{4}$$

et nous aurons

(5) $$(\alpha_i, \alpha_i) = 0.$$

Théorème de Lagrange. — *Les quantités* $[\alpha_i, \alpha_j]$ *sont constantes, c'est-à-dire indépendantes de* x.

En effet, en considérant f comme fonction des α, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \right)$$

ou, en vertu de (1),

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum \left(\frac{dp_k}{dx} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} - \frac{dx_k}{dx} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \right);$$

on en déduit, en différentiant par rapport à α_j,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = & \sum \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{dp_k}{dx} - \frac{\partial^2 p_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{dx_k}{dx} \right) \\ & + \sum \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{dp_k}{dx} - \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{dx_k}{dx} \right). \end{aligned}$$

Permutons dans cette formule les lettres i et j, puis soustrayons-en la nouvelle formule ainsi obtenue; nous aurons, en observant que $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{dp_k}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i}, \dots,$

$$\begin{aligned} 0 = & \sum \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{d}{dx} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \frac{d}{dx} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \right) \\ & - \sum \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \frac{d}{dx} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} \frac{d}{dx} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \right), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$0 = \frac{d}{dx} \sum \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \right)$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{d}{dx} [\alpha_i, \alpha_j] = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème de Cauchy. — *On a*

$$(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] + \ldots + (\alpha_i, \alpha_n)[\alpha_j, \alpha_n] = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \lessgtr j. \end{cases}$$

En effet on a, d'après les formules suivantes, démontrées dans la théorie du changement de variables (p. 213, t. I)

$$(6) \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial p_\mu} + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial p_\mu} + \ldots + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_n}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_\mu}, \\ 0 = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial p_\nu} + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial p_\nu} + \ldots + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_n}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_\nu}, \\ 0 = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_\nu} + \ldots + \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_n}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_\nu}; \end{cases}$$

on a aussi

$$(\alpha_i, \alpha_1) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_k} \right),$$

$$(\alpha_i, \alpha_2) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_k} \right),$$

. . . .

Multiplions la première de ces équations par $\dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1}$, la seconde par $\dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2}$, ... et ajoutons : nous aurons, en vertu de (6),

$$(\alpha_i, \alpha_1)\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_1} + (\alpha_i, \alpha_2)\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_2} + \ldots = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\mu};$$

on aurait de même

$$(\alpha_i, \alpha_1)\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_1} + (\alpha_i, \alpha_2)\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_2} + \ldots = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_\mu}.$$

Multiplions la première de ces formules par $\dfrac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_j}$, la seconde par $\dfrac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j}$; retranchons, faisons dans l'équation résultante

$\mu = 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons les résultats; nous aurons

$$(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] + \ldots$$
$$= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \ldots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_j} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha_i, \alpha_1)[\alpha_j, \alpha_1] + (\alpha_i, \alpha_2)[\alpha_j, \alpha_2] + \ldots = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \lessgtr j. \end{cases}$$

C. Q. F. D.

Théorème de Poisson. — Le théorème de Poisson est un corollaire des théorèmes de Lagrange et de Cauchy; en effet, si les $[\alpha_i, \alpha_j]$ sont constants, d'après les formules de Cauchy, les (α_i, α_j) le seront aussi. D'ailleurs, le déterminant des équations de Cauchy ne peut être nul; en effet, si l'on appelle D le déterminant des quantités $[\alpha_i, \alpha_j]$ et Δ celui des quantités (α_i, α_j), les équations de Cauchy montrent que l'on a (en vertu de la règle connue pour la multiplication des déterminants)

$$D\Delta = 1;$$

donc ni D ni Δ ne sont nuls identiquement.

C'est en vue d'établir le théorème de Poisson que Cauchy avait démontré ses formules, et cela dès 1831, dans un Mémoire lithographié tiré à un très petit nombre d'exemplaires. C'est dans ce Mémoire qu'il a mis, avant Hamilton, les équations de la Dynamique sous la forme canonique, improprement appelée *hamiltonienne*.

XVII. — Application du principe du dernier multiplicateur.

Le principe du dernier multiplicateur s'applique très bien aux équations canoniques

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dx_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)} = \ldots = \frac{dp_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)} = \ldots$$

ou à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\sum\left(\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0;$$

le multiplicateur M de cette équation est donné par la formule

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\sum\frac{\partial}{\partial p_i}\left(M\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0,$$

et l'on voit immédiatement qu'en prenant $M=1$, on satisfait à cette équation :

Donc, quand on connaît toutes les intégrales, moins une, d'un système d'équations canoniques, la dernière peut toujours s'obtenir par des quadratures,

nouvelle propriété des équations canoniques sur laquelle Jacobi a attiré souvent l'attention des géomètres, et qui a été découverte par lui.

Remarque. — Si la fonction f ne contient pas x, il suffira de connaître toutes les intégrales qui ne contiennent pas x moins une, pour avoir cette intégrale; ainsi dans ce cas, il suffira de connaître toutes les intégrales moins deux, pour avoir ces deux dernières.

XVIII. — Constantes canoniques de Jacobi.

Nous avons fait observer que le théorème de Poisson ne fournissait pas toujours une intégrale nouvelle; nous allons faire connaître un exemple remarquable de constantes qui, combinées ensemble, ne fournissent pas d'intégrales nouvelles.

Théorème I. — *Soit u une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et*

de n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: *si l'on pose*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} = -\beta_i, \tag{1}$$

on pourra calculer les quantités α *et* β *en fonction des* p *et des* x *ou,* vice versa, *les* p *et les* x *en fonction des* α *et des* β; *si l'on désigne par un* d *les dérivées prises par rapport aux variables* p, x *et par un* δ *celles qui sont prises par rapport aux variables* α, β, *on aura pour le changement de variables les formules suivantes*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dx_j} &= \frac{\delta p_j}{\delta \beta_i}, & \frac{d\beta_i}{dx_j} &= -\frac{\delta p_j}{\delta \alpha_i}, \\ \frac{d\alpha_i}{dp_j} &= -\frac{\delta x_j}{\delta \beta_i}, & \frac{d\beta_i}{dp_j} &= \frac{\delta x_j}{\delta \alpha_i}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

on obtient ces équations en différentiant les formules (1) par rapport aux x_i et aux p_i et par rapport aux α et aux β et en éliminant les dérivées secondes de la fonction u. Si, dans la première des formules (1), on suppose $i = 1, 2, 3, \ldots$, et que l'on différentie les formules ainsi obtenues par rapport à x_k avec la caractéristique d, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_k} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial \alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dx_k} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial \alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dx_k} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_k} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial \alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dx_k} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial \alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dx_k} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{3}$$

on a, de même, en différentiant par rapport à p_l avec la caractéristique d

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial \alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dp_l} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial \alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dp_l} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial \alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{dp_l} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial \alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{dp_l} + \ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

En différentiant avec la caractéristique δ les dernières formules (1) par rapport à α_μ et β_ν, on trouve

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_\mu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial x_1}\dfrac{\delta x_1}{\delta\alpha_\mu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial x_2}\dfrac{\delta x_2}{\delta\alpha_\mu} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2\partial\alpha_\mu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2\partial x_1}\dfrac{\delta x_1}{\delta\alpha_\mu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2\partial x_2}\dfrac{\delta x_2}{\delta\alpha_\mu} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial x_1}\dfrac{\delta x_1}{\delta\beta_\nu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial x_2}\dfrac{\delta x_2}{\delta\beta_\nu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial x_3}\dfrac{\delta x_3}{\delta\beta_\nu} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_\nu\partial x_1}\dfrac{\delta x_1}{\delta\beta_\nu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_\nu\partial x_2}\dfrac{\delta x_2}{\delta\beta_\nu} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha_\nu\partial x_3}\dfrac{\partial x_3}{\partial\beta_\nu} + \ldots = -1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Multiplions les équations (3) par $\dfrac{\delta x_1}{\delta\alpha_\mu}, \dfrac{\delta x_2}{\delta\alpha_\mu}, \ldots$, et ajoutons-les en tenant compte de (5); on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_k}\frac{\delta x_1}{\delta\alpha_\mu} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_k}\frac{\delta x_2}{\delta\alpha_\mu} + \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_\mu}\frac{d\alpha_1}{dx_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2\partial\alpha_\mu}\frac{d\alpha_2}{dx_k} - \ldots = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire, en ajoutant et en retranchant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial\alpha_\mu}$,

$$\frac{\delta}{\delta\alpha_k}\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \frac{d}{dx_\mu}\frac{\partial u}{\partial\alpha_k}$$

ou bien, en vertu de (1),

$$\frac{\delta p_\mu}{\delta\alpha_k} = -\frac{d\beta_k}{dx_\mu};$$

c'est l'une des formules (2). Si, au lieu de multiplier les formules (2) par $\dfrac{\delta x_1}{\delta\alpha_\mu}, \dfrac{\delta x_2}{\delta\alpha_\mu}, \ldots$, on les multiplie par $\dfrac{\delta x_1}{\delta\beta_\nu}, \dfrac{\delta x_2}{\delta\beta_\nu}, \ldots$,

et si on les ajoute, en ayant égard à (6), on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_k}\frac{\delta x_1}{\delta \beta_\nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_k}\frac{\delta x_2}{\delta \beta_\nu} + \ldots = -\frac{d\alpha_\nu}{dx_k},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta p_k}{\delta \beta_\nu} = \frac{d\alpha_\nu}{dx_k};$$

c'est encore une des formules (2). En opérant sur (4) comme sur (3), on trouve les deux dernières formules (2).

Théorème II. — *Si les variables p, x, α, β sont liées entre elles par les formules* (1), *on aura*

$$(7) \qquad \begin{cases} (\alpha_i, \alpha_j) = 0, & (\beta_i, \beta_j) = 0, \\ (\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases} \end{cases}$$

En effet, rappelons-nous que

$$(\alpha_i, \beta_j) = \sum_\mu \left(\frac{d\alpha_i}{dx_\mu}\frac{d\beta_j}{dp_\mu} - \frac{d\alpha_i}{dp_\mu}\frac{d\beta_j}{dx_\mu} \right);$$

si l'on fait alors usage des formules (2), on a

$$(\alpha_i, \beta_j) = \sum_\mu \left(\frac{d\alpha_i}{dx_\mu}\frac{\delta x_\mu}{\delta \alpha_j} + \frac{d\alpha_i}{dp_\mu}\frac{\delta p_\mu}{\delta \alpha_j} \right) = \frac{\delta \alpha_i}{\delta \alpha_j};$$

il en résulte que, si $i \lessgtr j$, le résultat est nul; si, au contraire, $i = j$, le résultat est égal à un.

Les autres formules (7) se démontrent avec la même facilité.

Il résulte de là que, si l'on appliquait aux équations canoniques la méthode d'intégration de Jacobi du § XII, les constantes trouvées par ce procédé feraient tomber en défaut le théorème de Poisson.

On a donné aux constantes qui satisfont aux relations (7) le nom de *constantes canoniques*.

Si l'on considère les intégrales des équations canoniques,

$$\frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

il est facile de démontrer que, si l'on appelle x_i^0 et p_i^0 les valeurs de x_i et p_i pour $x = x^0$, les constantes x_i^0 et p_i^0 seront canoniques. Soit par exemple

$$(8) \qquad p_i^0 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x, p_1, p_2, \ldots),$$

si l'on fait $x = x_0$, on a

$$(9) \qquad p_i^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x^0, p_1^0, p_2^0, \ldots)$$

et cette formule est identique; on a donc

$$p_i = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x, p_1, p_2, \ldots).$$

De (8), on tire

$$\frac{\partial p_i^0}{\partial p_i} = \varphi'_{p_i}(x_1, x_2, \ldots),$$

et pour $x = x^0$

$$\frac{\partial p_i^0}{\partial p_i} = \varphi'_{p_i^0}(x_1^0, x_2^0, \ldots)$$

ou, en vertu de (9), $\frac{\partial p_i^0}{\partial p_i} = 1$;
de même

$$\frac{\partial x_i^0}{\partial x_i} = 1, \qquad \frac{\partial p_i^0}{\partial p_j} = 0, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$(x_i^0, x_j^0) = 0, \qquad (p_i^0, p_j^0) = 0, \qquad (x_i^0, p_j^0) = 0, \qquad (x_i^0, p_i^0) = 1.$$

XIX. — Méthode de la variation des constantes.

On a souvent besoin en Astronomie de résoudre le problème suivant :

Les 2n équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

étant intégrées rigoureusement, on propose d'intégrer, au moins approximativement, les équations

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_i},$$

dans lesquelles R *est généralement petit par rapport à* f.

Pour résoudre ce problème, nous désignerons par α_1, α_2, ..., α_n; β_1, β_2, ..., β_n les intégrales des équations (1) et pour la commodité nous supposerons aussi $\beta_1 = \alpha_{i+1}$, ..., $\beta_n = \alpha_{2n}$, et dans les équations (2) nous prendrons pour variables, à la place de x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n, les fonctions α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_n.

Nous aurons alors

$$(3) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx} + \ldots;$$

de cette équation et de ses analogues on tire les $\frac{dx_i}{dx}$ et les $\frac{dp_i}{dx}$ et, en les portant dans (2), le changement de variables se trouve effectué; cela revient à éliminer les $\frac{dx_i}{dx}$ et les $\frac{dp_i}{dx}$ entre (2) et (3). Cette élimination peut se faire en tirant ces quantités de (2) pour les porter dans (3), ce qui donne

$$\frac{d\alpha_i}{dx} = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_1}\right) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_2}\right) - \ldots$$
$$+ \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_2}\right) + \ldots.$$

Si dans cette formule on fait $\mathrm{R} = 0$, $\frac{d\alpha_i}{dx}$ est nul; car, α_i étant une intégrale de (1), $\frac{d\alpha_i}{dx}$ est la dérivée d'une constante; on a donc

$$0 = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \ldots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots,$$

et, par suite, l'équation précédente se simplifie et devient

$$(4) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx} = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_j}\right);$$

or

$$\frac{\partial R}{\partial p_j} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_j} + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_j} + \ldots,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} + \ldots.$$

Portant ces valeurs dans (4) et faisant usage de la notation de Poisson, on a successivement

$$\frac{d\alpha_i}{dx} = \sum\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_j}\right)\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + \sum\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_j}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_j}\right)\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} + \ldots$$

ou

$$(5) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_i) + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}(\alpha_2, \alpha_i) + \ldots;$$

telles sont les formules dans lesquelles se transforment les équations (2); elles sont relativement simples, parce que les quantités (α_i, α_j) sont indépendantes de x.

Quand $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ sont des constantes canoniques, les formules (5) prennent la forme remarquable

$$(6) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx} = -\frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dx} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}.$$

Jacobi arrive plus rapidement à ces équations, mais nous avons préféré suivre la marche indiquée par Cauchy qui fait connaître les équations (5) dont on peut faire usage quand on n'a pas de constantes canoniques à sa disposition.

En résumé, pour intégrer les équations (2), on appliquera la méthode de Jacobi (§ XII) à l'intégration des équations (1), ce qui fournira un système de constantes canoniques α, β; après quoi, l'on formera les équations (6), auxquelles on appliquera encore la même méthode, s'il le faut, dans le cas où la fonction R pourrait se décomposer en deux autres R_1 et R_2, l'intégration de (6) étant simplifiée par la substitution de R_1 à R, et ainsi de suite.

XX. — Théorème de M. Bertrand.

M. Bertrand a montré que, étant donnée une intégrale quelconque α_1 des équations canoniques, il en existait toujours $2n - 1$ autres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ donnant les relations

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_i) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 2.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les suivants, également dus à M. Bertrand :

Théorème I. — *Si les intégrales α_i, α_j sont telles que (α_i, α_j) soit fonction de α_i et α_j, il existera une intégrale γ fonction de α_i, α_j, telle que $(\alpha_i, \gamma) = 1$.*

En effet

$$(\alpha_i, \gamma) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\mu} \right);$$

mais, γ étant fonction de α_i et α_j, on aura

$$(\alpha_i, \gamma) = \sum \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_\mu} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_\mu} \right) - \ldots \right]$$

ou

$$(\alpha_i, \gamma) = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_j} (\alpha_i, \alpha_j).$$

Si l'on veut que $(\alpha_i, \gamma) = 1$, il suffira de résoudre l'équation

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_j} (\alpha_i, \alpha_j) = 1,$$

où (α_i, α_j) est donné en fonction de α_i et de α_j.

Théorème II. — *Il existe toujours une intégrale β qui, combinée avec l'intégrale donnée α_1, fournit la relation*

$$(\alpha_1, \beta) \gtrless 0.$$

En effet, soient $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ des intégrales distinctes, on devra avoir

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} \right) = 0,$$

et si l'on avait, en outre,

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$(\alpha_1, \alpha_3) = \sum \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et, par suite, $\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})}{\partial(x_1, x_2, \dots, p_1, p_2, \dots)} = 0$, puisque toutes les dérivées de α_1 ne sauraient être nulles, les fonctions α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ ne seraient pas alors distinctes.

Théorème III. — *Étant donnée l'intégrale α_1, il en existera toujours une autre β, telle que*

$$(\alpha_1, \beta) = 1.$$

En effet, soit α_2 une intégrale distincte de α_1, et soit (α_1, α_2) une nouvelle intégrale que nous appellerons α_3 ; soit (α_1, α_3) une nouvelle intégrale que nous appellerons α_4, etc.; α_1, $\alpha_2 \dots, \alpha_k$ ne sauraient être indéfiniment de nouvelles intégrales, et nous supposerons $\alpha_k = \varpi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$. Soit $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$ une fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$, on a

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \Pi) &= \sum \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \right) - \dots \right] \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} (\alpha_1, \alpha_2) + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{k-1}} (\alpha_1, \alpha_{k-1});\end{aligned}$$

si l'on veut que (α_1, Π) soit égal à un, on posera

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} (\alpha_1, \alpha_2) + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{k-1}} (\alpha_1, \alpha_{k-1}) = 1,$$

ce qui revient à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} \alpha_3 + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} \alpha_4 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{k-1}} \alpha_k = 1.$$

Cette équation fera connaître II, qui est l'expression de l'intégrale cherchée.

Théorème IV. — *Étant donnée une intégrale α_1, il en existe toujours $2n-1$ autres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$, telles que l'on ait*

$$(1) \quad (\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_4) = 0, \quad \ldots, \quad (\alpha_1, \alpha_{2n}) = 0.$$

En effet, il en existe toujours une α_2, telle que

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

S'il n'existe pas d'intégrale β donnant $(\alpha_1, \beta) = 0$, il en existera une β donnant $(\alpha, \beta) \gtrless 0$; posons alors $(\alpha_1, \beta) = \beta'$; nous aurons

$$(\alpha_1, \alpha_2 - \beta) = (\alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_1, \beta);$$

comme $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, il faut en conclure que (α_1, β) ou β' est différent de un, sans quoi $(\alpha_1, \alpha_2 - \beta)$ serait nul et il existerait une intégrale $\alpha_3 = \alpha_2 - \beta$, telle que $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$. Posons alors $(\alpha_1, \beta) = \beta'$, $(\alpha_1, \beta') = \beta''$, $\ldots$, $(\alpha_1, \beta^{k-1}) = \beta^k$, β^k désignant une fonction des intégrales précédentes.

On aura, en appelant γ une fonction de $\alpha_1, \beta, \beta', \ldots$,

$$(\alpha_1, \gamma) = (\alpha_1, \beta)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}, \qquad \ldots, \qquad (\alpha_1, \beta^{k-1})\frac{\partial\gamma}{\partial\beta^{k-1}}$$

ou

$$(2) \qquad (\alpha_1, \gamma) = \beta'\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} + \ldots + \beta^k\frac{\partial\gamma}{\partial\beta^{k-1}};$$

si l'on remplaçait (α_1, γ) par zéro, on aurait alors une équation fournissant une valeur de γ, telle que $(\alpha_1, \gamma) = 0$; il y a plus, je dis que l'on peut satisfaire à toutes les formules (1). En effet, étant donnée une intégrale telle que $(\alpha_1, \beta) \gtrless 0$, on arrivera encore à l'équation (2), et l'on posera

$$0 = \beta'\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} + \beta''\frac{\partial\gamma}{\partial\beta'} + \ldots + \beta^k\frac{\partial\gamma}{\partial\beta^{k-1}}.$$

Il faut prouver que γ tiré de là sera une intégrale nouvelle. S'il n'en était pas ainsi, γ serait fonction f des intégrales déjà trouvées et satisfaisant aux relations (2), et l'on aurait $(\alpha_1, f) = 0$, ce qui établirait une relation entre α_1 et ces intégrales; ces dernières ne seraient donc pas distinctes.

On voit par là que le théorème de Poisson peut fort bien, par la nature du problème que l'on veut traiter, ne fournir aucune intégrale nouvelle, quand on cherche à en faire des applications.

Le théorème de M. Bertrand permettra souvent de trouver une intégrale des équations canoniques quand on en connaîtra déjà une; c'est ce que l'on verra plus loin, dans l'exposition d'une méthode d'intégration due à Jacobi.

XXI. — Sur une méthode propre à exprimer les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle.

Je suppose que les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient liées aux quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des équations de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = a,$$

a désignant une constante pouvant être bien déterminée ou arbitraire : soient

$$(1) \qquad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n$$

ces équations. Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les premiers membres de ces équations, pour que l'expression

$$(2) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte [1].

---

[1] On comprend toute l'importance d'une pareille recherche : si la question était convenablement résolue, l'équation $f_1 = a_1$ aux dérivées partielles du premier ordre serait également résolue, parce que, alors, les autres équations (1) feraient connaître $p_1, p_2, \ldots$, et l'expression (2) inté-

On sait que les conditions d'intégrabilité de l'expression (2), mises sous forme explicite, sont de la forme

(3) $$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

et cette équation, ayant lieu pour toutes les valeurs différentes de i et j moindres que $n+1$, tient lieu de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations. Différentions par rapport à x_i deux des équations (1), que nous désignerons par $f_\mu = a_\mu$, $f_\nu = a_\nu$: nous aurons

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0,\\
&\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\nu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\nu}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions la première par $\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}$, et retranchons : nous aurons

(4) $$\left\{\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_1}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_1}\right)\\
& + \frac{\partial p_2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_2}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_2}\right) + \ldots;
\end{aligned}\right.$$

si l'on fait successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ et si l'on ajoute les résultats obtenus, on a, en observant que les coefficients de $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$ et de $\frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ sont égaux et de signes contraires et en ayant égard à la formule (3),

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\right) = 0$$

ou, d'après la notation de Poisson (p. 72),

(5) $$(f_\mu, f_\nu) = 0.$$

---

grée ferait connaître la fonction u qui a pour dérivées p_1, p_2, ... et qui satisfait à $f_1 = a$; mais la question qui nous occupe touche encore à d'autres théories très importantes.

D'ailleurs, si l'on pose

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i},$$

l'équation obtenue en ajoutant les formules (4) pourra s'écrire, abstraction faite des réductions auxquelles donne lieu la relation (3) ou $p_{ij} = 0$,

$$(6) \qquad (f_\mu, f_\nu) + \sum p_{ij}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial f_\nu}{\partial p_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_j}\right) = 0,$$

et l'on voit que, réciproquement, si les (f_μ, f_ν) sont nuls, il faudra en conclure $p_{ij} = 0$; mais cette conclusion n'est pas rigoureuse, et il resterait à prouver que le déterminant des coefficients p_{ij} dans (6) n'est pas nul : c'est ce que fait Jacobi dans ses *Leçons de Dynamique* (p. 255). Nous préférons calculer directement les p_{ij} en fonction des (f_μ, f_ν), comme il suit.

Soient Π et Π' deux fonctions pouvant contenir, outre les variables x, p, les quantités a fonctions des p et des x, sous forme explicite; nous aurons

$$\begin{aligned}(\Pi, \Pi') &= \sum\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_i} - \frac{\partial \Pi'}{\partial x_i}\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\right)\\ &= \sum\left[\left(\frac{d\Pi}{dx_i} + \frac{d\Pi}{da_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{d\Pi}{da_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \ldots\right)\left(\frac{d\Pi'}{dp_i} + \frac{d\Pi'}{da_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \ldots\right)\right.\\ &\qquad\left. - \left(\frac{d\Pi}{dp_i} + \frac{d\Pi}{da_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \ldots\right)\left(\frac{d\Pi'}{dx_i} + \frac{d\Pi'}{da_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \ldots\right)\right].\end{aligned}$$

Dans cette formule, les d servent à désigner des dérivées partielles prises en regardant les x, les p et les a comme des variables indépendantes; on peut l'écrire encore

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}(\Pi, \Pi') = \sum_i \frac{d(\Pi, \Pi')}{d(x_i, p_i)} &+ \sum_{k,i}\frac{d\Pi}{da_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{d\Pi'}{dp_i} - \frac{\partial a_k}{\partial p_i}\frac{d\Pi'}{dx_i}\right)\\ &- \sum_{ki}\frac{d\Pi'}{da_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{d\Pi}{dp_i} - \frac{\partial a_k}{\partial p_i}\frac{d\Pi}{dx_i}\right)\\ &+ \sum\left(\frac{d\Pi}{da_\mu}\frac{d\Pi'}{da_\nu} - \frac{d\Pi}{da_\nu}\frac{d\Pi'}{da_\mu}\right)(a_\mu, a_\nu).\end{aligned}\right.$$

Supposons que Π et Π' soient les valeurs de p_r et p_s déduites des équations (1) : on aura

$$(\Pi, \Pi') = (p_r, p_s) = \frac{\partial p_r}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_r} = p_{r,s};$$

or Π, Π' s'exprimeront simplement en fonction des x et des a; donc ils ne contiendront pas les p explicitement et, par suite, la formule (7) deviendra

$$p_{r,s} = \sum \left(\frac{d\Pi}{da_\mu} \frac{d\Pi'}{da_\nu} - \frac{d\Pi}{da_\nu} \frac{d\Pi'}{da_\mu} \right) (a_\mu, a_\nu)$$

ou mieux

$$p_{r,s} = \sum \left(\frac{dp_r}{df_\mu} \frac{dp_s}{df_\nu} - \frac{dp_s}{df_\mu} \frac{dp_r}{df_\nu} \right) (f_\mu, f_\nu);$$

telles sont les valeurs des différences $p_{r,s}$ exprimées à l'aide des quantités (f_μ, f_ν) : on voit donc que les formules (5) entraînent les formules (3) et peuvent les remplacer.

Revenons maintenant aux formules (1). Nous avons dit que les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pouvaient être ou des constantes déterminées, nulles par exemple; ou des constantes arbitraires. Ces deux cas doivent être soigneusement distingués. En effet, si les constantes a ne sont pas arbitraires, les formules $(f_\mu, f_\nu) = 0$ n'auront lieu que si les formules (1) servent à déterminer les p, tandis que si les quantités a sont arbitraires, les formules $(f_\mu, f_\nu) = 0$ auront lieu quels que soient les a, et par suite quand on remplacera ces a par des fonctions arbitraires des x : c'est-à-dire que ces formules $(f_\mu, f_\nu) = 0$ seront des identités.

Remarque. — Les équations $(f_\mu, f_\nu) = 0$ ne sont pas absolument nécessaires pour que l'expression (1) soit une différentielle exacte, bien qu'elles soient satisfaites quand cette expression est une différentielle exacte; je m'explique :

Supposons, par exemple, les a arbitraires; si l'on pose, en général,

$$(f_\mu, f_\nu) = f_{\mu\nu},$$

le théorème de Donkin (p. 73) donnera

$$(f_{\mu\nu}, f_\lambda) + (f_{\nu\lambda}, f_\mu) + (f_{\lambda\mu}, f_\nu) = 0.$$

Supposons que l'on ait $f_{\lambda\mu} = 0$, $f_{\lambda\nu} = 0$; on déduira de cette équation

$$(f_{\mu\nu}, f_\lambda) = 0.$$

Considérons cette équation comme une équation aux dérivées partielles définissant $f_{\mu\nu}$; on pourra l'intégrer de manière que, pour $x_1 = x_1^0$, l'inconnue $f_{\mu\nu}$ se réduise à zéro, quels que soient $x_2, \ldots, x_n, \ldots, p_n$: alors $f_{\mu\nu}$ sera nul identiquement. Il résulte de là que, si $f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{1,n}$ sont nuls, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, les équations $f_{ij} = 0$ seront aussi identiquement satisfaites si elles le sont pour $x_1 = x_1^0$. En définitive, pour pouvoir affirmer que (1) est une différentielle exacte, il suffit de savoir que

$(f_1, f_2), (f_1, f_3), \ldots\ (f_1, f_n)$ sont nuls identiquement

$(f_2, f_3), \ldots\ (f_2, f_n)$ .... pour $x_1 = x_1^0$

....

(f_{n-1}, f_n) .... pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ .... $x_{n-1} = x_{n-1}^0$.

XXII. — Théorème de Liouville.

Si l'on connaît n intégrales des équations canoniques en nombre 2n

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

et si ces intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *satisfont aux relations*

$$(2) \qquad (\alpha_i, \alpha_j) = 0,$$

qui sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, *on pourra toujours achever l'intégration au moyen de simples quadratures.*

En effet, les équations (2) expriment que les valeurs des p déduites des intégrales connues rendent l'expression

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

une différentielle exacte du. Or, si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$(3)\qquad f\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, x_1, x_2, \ldots\right) = h,$$

et que, à la place de v, on y substitue la fonction

$$u = \int (p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n),$$

on aura

$$f(p_1, p_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots) = h,$$

ce qui est une identité que l'on déduit des formules (1) en multipliant la première par dp_i, la seconde par dx_i, en les retranchant, en ajoutant les résultats et en intégrant.

Ainsi les valeurs des p tirées de (2) fournissent une fonction u renfermant n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ outre celles que l'on peut toujours introduire par simple addition, et cette fonction u satisfait à (3). En vertu du théorème de Jacobi (p. 66), les intégrales des équations canoniques seront donc

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_{n-1}} = -\beta_{n-1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial u}{\partial h} = x + a,$$

a désignant une nouvelle constante; de plus, les constantes d'intégration seront canoniques. (Nous supposons que, parmi nos n constantes α, figure l'intégrale toujours connue $f = h$.)

Le théorème de Liouville fournit donc un exemple du cas dans lequel l'intégration d'une équation aux dérivées partielles précédera celle d'un système canonique. Le théorème

de Liouville trouve son application dans les deux problèmes les plus importants de l'Astronomie, à savoir l'étude du mouvement des planètes et l'étude du mouvement d'un corps solide qui présente un point fixe.

XXIII. — Réduction d'un système quelconque à la forme canonique.

La forme canonique peut être donnée, comme l'a fait voir Liouville, à un système quelconque d'équations différentielles. Considérons, par exemple, le système

$$(1)\qquad dx = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

dans lequel X_1, X_2, ... désignent des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n, x. Posons

$$V = x'_1 X_1 + x'_2 X_2 + \ldots + x'_n X_n,$$

et définissons les variables x'_1, ..., x'_n au moyen des équations

$$(2)\qquad \frac{dx'_1}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad \frac{dx'_2}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx'_n}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Les formules (1) pourront s'écrire

$$(3)\qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x'_1}, \qquad \frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x'_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x'_n}.$$

Le système (2), (3) est alors de la forme canonique ; mais cette transformation du système (1) dans le système (2), (3) sera rarement avantageuse, à cause du grand nombre de variables nouvelles que l'on est obligé d'introduire dans la question.

XXIV. — Méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous allons maintenant exposer la méthode d'intégration que Cauchy a fait connaître dès 1819 dans le *Recueil*

de la Société philomathique. Nous désignerons la fonction inconnue par u, les variables dont elle dépend par x, x_1, x_2, ..., x_n, et nous poserons

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dans ce qui va suivre, nous écrirons toujours ΣV_i au lieu de $\sum_{i=1}^{i=n} V_i$. Ceci posé, soit

$$(1) \qquad f = 0$$

l'équation à intégrer, f désignant une fonction de u, x, x_1, x_2, ..., x_n; p, p_1, p_2, ..., p_n; posons

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dots, \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \dots, \quad U = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \dots, \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dots .$$

Soit Du la différentielle totale de u quand x, x_1, x_2, ... sont variables indépendantes, Dx, Dx_1, Dx_2, ... des accroissements arbitraires donnés à x, x_1, x_2, ... Intégrer l'équation (1), c'est, en définitive, trouver pour $u, p, p_1, p_2, \dots, p_n$ des fonctions de x, x_1, x_2, ..., x_n qui satisfassent à l'équation

$$(2) \qquad Du = p\,Dx + \sum p_i\,Dx_i,$$

qui résume celles-ci :

$$(2\ bis) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_n,$$

p étant déduit de (1) en fonction de x, x_1, ..., u; p_1, ..., p_n. Si α_1, α_2, ..., α_n désignent des fonctions quelconques

de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$, ces équations (2) ou (2 *bis*) seront équivalentes à celles-ci :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = p + \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_k} = \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la parenthèse indiquant que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, x$ sont variables indépendantes. Si l'on désigne par un d les différentielles relatives à x quand $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ restent constantes et par un δ les différentielles totales relatives aux α, x restant constant, les équations précédentes pourront être remplacées par

$$du = p\,dx + \sum p_i\,dx_i, \tag{3}$$

$$\delta u = \sum p_i\,\delta x_i. \tag{4}$$

Il faudra alors satisfaire à ces deux équations sans oublier que p doit être supposé tiré de (1) et exprimé en fonction de $x, x_1, x_2, \ldots, u; p_1, p_2, \ldots, p_n$. C'est à ce dernier point de vue que nous allons considérer la question.

Des formules (3) et (4) on tire, en différentiant la première avec la caractéristique δ et la seconde avec la caractéristique d, les formules suivantes

$$\delta\,du = \delta p\,dx + \sum \delta p_i\,dx_i + \sum p_i\,\delta\,dx_i,$$

$$d\,\delta u = \sum dp_i\,\delta x_i + \sum p_i\,\delta\,dx_i.$$

Soustrayant membre à membre, on a

$$0 = \delta p\,dx + \sum \delta p_i\,dx_i - \sum dp_i\,\delta x_i;$$

remplaçant dans cette formule δp par sa valeur tirée de (1) différentiée, à savoir

$$X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 + \ldots + U\,\delta u + P\,\delta p + P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + \ldots = 0,$$

on a

$$0 = -\frac{1}{P}(X_1 \delta x_1 + \ldots + X_n \delta x_n + U \delta u + P_1 \delta p_1 + \ldots) dx$$
$$+ \sum \delta p_i \, dx_i - \sum dp_i \, \delta x_i$$

ou bien

$$\sum (P \, dx_i - P_i \, dx) \delta p_i - U \delta u \, dx - \sum (P \, dp_i + X_i \, dx) \delta x_i = 0$$

ou enfin, en remplaçant δu par $\sum p_i \delta x_i$,

$$(5) \quad \sum (P \, dx_i - P_i \, dx) \delta p_i - \sum (P \, dp_i + X_i \, dx + U p_i \, dx) \delta x_i = 0.$$

Cette équation est une conséquence de (3) et (4); on peut y satisfaire en prenant

$$(6) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + U p_1} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + U p_n};$$

on satisfera à la fois à (5) et à (2) en écrivant à la suite de ces rapports égaux le rapport

$$\frac{du}{pP + \Sigma p_i P_i}.$$

On pourra même, pour la symétrie, écrire à la suite

$$\frac{-dp}{X + Up};$$

car, en vertu de (1), on a

$$(7) \qquad P \, dp + \sum P_i \, dp_i + X \, dx + \sum X_i \, dx_i + U \, du = 0,$$

et de (6) on déduit que chacun des rapports qui entrent dans cette formule est, en vertu de (7), égal à $\frac{-dp}{X + Up}$; nous écrirons donc le système (6) ainsi, en nous rappelant qu'il con-

tient un membre qui n'est pas nécessaire,

$$(8)\quad \frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = -\frac{dp}{X + Up} = -\frac{dp_1}{X_1 + Up_1} = \ldots = \frac{du}{Pp + \sum P_i p_i}.$$

Ceci posé, l'équation (3) donne

$$u = u^0 + \int_{x^0}^{x} \left(p\,dx + \sum p_i\,dx_i\right),$$

l'indice o placé en haut d'une lettre indiquant que l'on y a fait $x = x^0$; cette équation où u^0 est arbitraire est équivalente à (3). On en tire

$$\delta u = \delta u^0 + \int_{x^0}^{x} \left(\delta p\,dx + \sum \delta p_i\,dx_i + \sum p_i\,\delta\,dx_i\right)$$

ou, en intégrant par parties,

$$(9)\quad \begin{cases} \delta u = \delta u^0 + \sum p_i\,\delta x_i - \sum p_i^0\,\delta x_i^0 \\ \qquad + \int_{x_0}^{x} \left(\delta p\,dx + \sum \delta p_i\,dx_i - \sum \delta x_i\,dp_i\right). \end{cases}$$

Si : 1° l'on choisit les p^0 et u^0 de telle sorte que

$$(10)\quad \delta u^0 = \sum p_i^0\,\delta x_i^0;$$

2° si ensuite on remplace δp par sa valeur tirée de (1)

$$-\frac{1}{P}\left(\sum P_i\,\delta p_i + \sum X_i\,\delta x_i + U\,\delta u\right),$$

et dx_i, dp_i par leurs valeurs tirées de (8), l'équation (9) devient

$$\delta u = \sum p_i\,\delta x_i - \int_{x_0}^{x} \frac{U}{P}\left(\delta u - \sum p_i\,\delta x_i\right) dx;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d}{dx}\left(\delta u - \sum p_i\,\delta x_i\right) = -\frac{U}{P}\left(\delta u - \sum p_i\,\delta x_i\right)$$

ou

$$(11)\qquad \delta u - \sum p_i \delta x_i = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{U}{P} dx} \left(\delta u^0 - \sum p_i^0 \delta x_i^0 \right).$$

Si donc l'équation (10) est satisfaite, (4) le sera aussi. D'ailleurs les équations (8), supposées satisfaites, contiennent implicitement l'équation (3).

En résumé, pour résoudre le problème qui nous occupe, il suffit : 1° de satisfaire aux équations (8) (surabondantes); ces équations différentielles ordinaires contiendront dans leurs intégrales des constantes arbitraires qui sont fonctions des α; 2° il faudra ensuite choisir ces constantes de manière à satisfaire à (10), et, pour cela, si l'on prend pour constantes d'intégration $x_1^0, x_2^0, \ldots; p_1^0, p_2^0, \ldots, u^0$, il suffira de poser

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} & u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ & p_1^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0}, \qquad p_2^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0}, \qquad \ldots. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de p_i et de u seront, ainsi que celles de x_i, connues en fonction des x_i^0 et de x; éliminons les x_i^0, et nous aurons les p_i et u en fonction des x; enfin, en éliminant les p, nous aurons u.

Ainsi, pour intégrer l'équation (1), *il suffit de former les équations* (8), *de les intégrer en prenant pour constantes d'intégration les valeurs des variables pour* $x = x^0$, *de poser les équations* (12), *où* ϖ *est une fonction arbitraire, et d'éliminer entre* (12) *et les intégrales de* (8) *les constantes* x_i^0, p_i^0 *et les* p.

En vertu du théorème (p. 19), la solution ainsi trouvée se réduit à $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour $x = x^0$.

Il est presque inutile, après ce qui a été dit (p. 59), de faire observer que l'on peut obtenir d'autres solutions moins générales, en faisant entrer dans la fonction arbitraire ϖ un moins grand nombre de variables.

Enfin, on peut encore obtenir une solution complète, en éliminant entre les intégrales de (8) les quantités p^0 et p.

XXV. — Discussion de la méthode de Cauchy.

M. Bertrand a observé que la méthode de Cauchy tombait en défaut quand pour $x = x^0$ on avait $-\frac{U}{P} = \infty$, parce qu'alors la formule (11) ne permet plus, pour $x = x_0$, d'en conclure

$$\delta u - \sum p_i \delta x_i = \delta u^0 - \sum p_i^0 \delta x_i^0;$$

mais ce cas singulier ne se présentera que pour des formes particulières de la fonction ϖ. Au reste, on évitera cette difficulté en faisant disparaître, comme on l'a indiqué (p. 53), la fonction inconnue de l'équation et en appliquant à l'équation transformée la méthode exposée § IX. M. Serret a étudié ce cas particulier, dans les Notes placées à la fin de la dernière édition du *Calcul différentiel et intégral* de Lacroix et dans son propre Traité. (*Voir* aussi *Comptes rendus,* t. LIII, et les *Annales de l'École Normale,* t. III.)

La méthode qui fournit l'intégrale complète et qui consiste à éliminer les p^0 en les assimilant aux α peut tomber en défaut; c'est ce qui arrivera, s'il est impossible de calculer les x_i en fonction des p^0 et de x, et alors on ne pourra évidemment pas faire l'élimination de ces quantités p^0 entre les intégrales de (8).

Mais, si cette méthode ne permet plus de trouver une intégrale complète, il est clair que l'on pourra trouver une infinité d'autres intégrales complètes en particularisant la forme de la fonction ϖ, dont on fait usage pour trouver la solution générale; on pourra, par exemple, prendre

$$\varpi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a x.$$

XXVI. — Interprétation géométrique.

Si on lit le Mémoire d'Ampère sur les équations aux dérivées partielles, on se convaincra que Cauchy, qui s'était inspiré de ce Mémoire, a dû découvrir sa méthode en suivant la marche que nous allons indiquer. Nous conserverons les notations et le numérotage des formules des deux paragraphes précédents.

Si l'on considère u, x, x_1, ... comme coordonnées d'un point de l'hyperespace; p, p_1, ... comme les coefficients directeurs d'un plan passant par ce point, toutes ces variables constitueront un *élément* de l'hyperespace.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver une surface S dont le plan tangent en u, x, x_1, ... ait des coefficients directeurs p, p_1, p_2, ... satisfaisant à (1). Du, Dx, Dx_1, ... désignant les composantes d'un déplacement effectué sur la surface, l'équation (2) aura lieu.

On peut essayer de construire la surface S au moyen de génératrices que nous appellerons *caractéristiques :* ces caractéristiques seront fournies par l'intersection de la surface S avec d'autres surfaces variables, le long desquelles nous supposerons α_1, α_2, ..., α_n constantes. Nous représenterons par un δ, comme plus haut, un déplacement effectué sur la surface S en laissant x constant; au contraire, le d représentera un déplacement effectué sur la caractéristique, x seul variant, puisque l'on se déplace sur les surfaces S, et $\alpha_1 =$ const., $\alpha_2 =$ const., ...; alors les formules (3) et (4) auront lieu et l'on en déduira la relation (5) comme plus haut. Les équations (8) sont alors les équations différentielles de la caractéristique, ou plutôt ce sont des équations auxquelles doivent satisfaire les déplacements du, dx, dx_1, ... pour se trouver sur la surface S, et les différentielles dp, dp_1, ... pour être celles des coefficients d'un plan tangent en u, x, x_1, ... Éliminer les constantes d'intégration et les p entre

les équations (12) et les intégrales des équations des caractéristiques, c'est trouver une surface S, lieu convenablement défini de ces caractéristiques.

Il résulte de là que, si une intégrale contient un élément d'une caractéristique, elle contient cette caractéristique tout entière.

Deux intégrales différentes se rencontrent suivant une caractéristique si elles ont en commun un élément de cette caractéristique, et de plus elles se touchent suivant cette caractéristique, ce qui justifie le nom de *caractéristique*. Enfin une intégrale complète détermine une surface dont l'enveloppe est l'intégrale générale.

XXVII. — Application des théories précédentes à la résolution des problèmes de Dynamique.

Nous avons vu que Lagrange avait mis les équations du mouvement sous la forme (t. V, p. 398)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \tag{1}$$

lorsque les q_i n'étaient liés par aucune relation. Dans presque tous les problèmes que fournit l'étude des phénomènes naturels $Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots$ est une différentielle exacte [1] δU, en sorte que Q_i est de la forme $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ et ne contient pas le temps t; (1) peut alors s'écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Si l'on pose alors $\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$ et si l'on observe que T est homogène et du second degré en $q'_1, q'_2, \ldots$, puisqu'il l'est en x'_1,

---

[1] Toute question de Mécanique dans laquelle le principe des forces vives n'a pas lieu est une question qui ne saurait émaner de l'interprétation rigoureuse d'un fait naturel.

$y'_1, z'_1, \ldots$, et que $x'_1, y'_1, z'_1, \ldots$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $q'_1, q'_2, \ldots$, car

$$2\mathrm{T} = \sum m(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

$$q'_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial q_i}{\partial x_2} x'_2 \ldots,$$

on aura

$$2\mathrm{T} = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_n q'_n$$

ou

$$\mathrm{T} = -\mathrm{T} + \sum p_i q'_i.$$

Faisant alors varier toutes les variables, on a

$$\delta\mathrm{T} = -\sum \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q'_i}\,\delta q'_i - \sum \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_i}\,\delta q_i + \sum p_i\,\delta q'_i + \sum q'_i\,\delta p_i$$

ou, comme $p_i = \dfrac{\partial\mathrm{T}}{\partial q'_i}$,

$$\delta\mathrm{T} = -\sum \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_i}\,\delta q_i + \sum q'_i\,\delta p_i.$$

Cette équation montre que, si l'on prend les p_i à la place des q'_i pour variables et si l'on conserve les q_i, on a

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_i}, \qquad \left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial p_i}\right) = q'_i,$$

en écrivant momentanément dans des parenthèses les dérivées relatives aux nouvelles variables. La formule (2) donne alors

$$(4) \qquad \frac{dp_i}{dt} + \left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial q_i};$$

si l'on observe que U ne contient pas les p, on pourra écrire $\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial q_i} = \left(\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial q_i}\right)$. La seconde formule (3) et la formule (4) devien-

dront alors

$$\frac{dp_i}{dt} = \left[\frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{\partial q_i}\right], \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left[\frac{\partial(\mathrm{T}-\mathrm{U})}{\partial p_i}\right];$$

on peut supprimer les parenthèses et écrire

$$(5) \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{\partial p_i}.$$

Ces équations sont les équations canoniques du mouvement. D'après le théorème connu de Jacobi, *pour les intégrer, il suffira de connaître une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{U} - \mathrm{T},$$

dans laquelle on doit remplacer p_i *par* $\frac{\partial u}{\partial q_i}$. *Si alors* α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sont les constantes de cette intégrale complète et* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *des constantes arbitraires,*

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \ldots, & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_n} = \beta_n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial u}{\partial q_2} = p_2, & \ldots, & \dfrac{\partial u}{\partial q_n} = p_n \end{cases}$$

seront les intégrales des équations (5) *du mouvement.*

Le plus souvent U et T ne contiennent pas t : si l'on pose alors, en appelant h une constante arbitraire,

$$u = s - ht,$$

on a

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial s}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -h;$$

l'équation (6) *devient alors*

$$(8) \qquad h + \mathrm{U} = \mathrm{T}.$$

Soit s *une intégrale de cette équation renfermant, outre la constante* h, $n-1$ *autres constantes* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; $s + ht$

sera une intégrale de (6), *et les intégrales des équations* (5) *du mouvement seront*

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial s}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{\partial s}{\partial h} - t = \tau,$$
$$\frac{\partial s}{\partial q_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial s}{\partial q_n} = p_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \tau$ *désignant des constantes arbitraires.*

XXVIII. — Une application des méthodes précédentes.

Les équations canoniques du mouvement en coordonnées polaires sont

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial r}, & \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial r_1}, \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_1}, \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}, & \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi_1}, \end{cases}$$

$$H = -\frac{1}{2}\left(r_1^2 + \frac{1}{r^2}\theta_1^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\psi_1^2\right) + R;$$

r est le rayon vecteur, θ la latitude et ψ la longitude : alors

$$2T = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

et T désigne la force vive, R est la fonction des forces. Nous supposerons $R = \frac{\mu}{r} + R_1$, μ désignant une constante et R_1 une fonction petite par rapport à R. Nous négligerons d'abord dans H la quantité R_1 et nous prendrons

$$H = -\frac{1}{2}\left(r_1^2 + \frac{1}{r^2}\theta_1^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\psi_1^2\right) + \frac{\mu}{r}.$$

Pour avoir des constantes canoniques, nous emploierons la

méthode de Jacobi et nous intégrerons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2\right] + \frac{\mu}{r}.$$

On intégrera cette équation en posant

$$(3)\qquad u_1 = \alpha t + u,$$

α désignant une constante; on aura alors, en supposant que u_1 ne contienne pas t,

$$2\alpha + 2\frac{\mu}{r} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right)^2.$$

Posons maintenant, en appelant β une constante,

$$(4)\qquad u_1 = \beta\psi + u_2,$$

u_2 ne contenant pas ψ, nous aurons

$$2\alpha + \frac{2\mu}{r} - \frac{\beta^2}{r^2\cos^2\theta} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta}\right)^2;$$

nous pouvons décomposer ainsi cette équation

$$\left[2\alpha + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)^2\right] - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\beta^2}{\cos^2\theta} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0,$$

et l'on y satisfera en prenant

$$u_2 = u_3 + u_4,$$

$$2\alpha + \frac{2\mu}{r} - \frac{\gamma}{r^2} - \left(\frac{\partial u_3}{\partial r}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\beta^2}{\cos^2\theta} - \gamma + \left(\frac{\partial u_4}{\partial \theta}\right)^2 = 0,$$

et γ égal à une constante; on a alors

$$u_2 = \int\sqrt{2\alpha + \frac{2\mu}{r} - \frac{\gamma}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta.$$

Ces formules (3) et (4) donnent alors

$$(5)\quad u = -\alpha t + \beta\psi + \int\sqrt{2\alpha + \frac{2\mu}{r} - \frac{\gamma}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta;$$

les intégrales des équations (1) sont alors, en négligeant R_1,

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\alpha_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\beta_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \gamma} = -\gamma_1,$$

α_1, β_1, γ_1 désignant de nouvelles constantes. Lorsque l'on ne veut plus négliger R_1, les équations intégrales sont encore (5), mais α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 doivent être calculés au moyen des formules (p. 84)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial \alpha}, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial \beta}, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial \gamma}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \beta_1}, & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \gamma_1}. \end{aligned}\right.$$

Pour l'interprétation des constantes α, β, ..., nous renverrons aux *Vorlesungen* de Jacobi ou à notre *Mécanique*.

EXERCICES ET NOTES.

1. Intégrer l'équation

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

par la méthode de Cauchy.

2. Intégrer l'équation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \varphi(u),$$

et montrer que, φ étant arbitraire, $u = \text{const.}$ représente toutes les surfaces parallèles.

3. Trouver toutes les surfaces dans lesquelles la normale fait un angle constant avec une droite fixe.

4. Trouver des surfaces dans lesquelles la normale est toujours tangente à un cylindre de révolution.

5. Trouver des surfaces dans lesquelles les normales soient tangentes à une même sphère.

6. En appelant A, B, C, A′, B′, C′ des constantes et u, v des fonctions inconnues, on propose d'intégrer les équations simultanées

$$A\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + B\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} + C\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0,$$

$$A'\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + B'\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} + C'\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

7. Intégrer

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

8. Toute équation aux dérivées partielles du premier ordre dans laquelle les variables n'entrent que sous une forme linéaire peut, au moyen d'un changement de variable, être remplacée par une équation linéaire. Il suffit pour cela de prendre les dérivées de la fonction inconnue pour nouvelles variables.

9. Démontrer que, si α, β, γ, δ sont des intégrales des équations canoniques, on a

$$\sum\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{\partial(x_i, x_j, p_i, p_j)} = 0.$$

10. Si les variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ satisfont aux relations

$$(\alpha_i, \beta_i) = 1 \qquad (\alpha_i, \beta_j) = 0, \qquad (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \qquad (\beta_i, \beta_j) = 0,$$

et si la fonction $f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ peut s'exprimer en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, on aura

$$\frac{d\alpha_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial\alpha_i}.$$

(Bour, *sa Thèse*.)

N. B. — La *Mécanique céleste* de M. Resal, 2[e] édition, renferme un grand nombre d'applications des méthodes développées dans ce Chapitre. — Consulter surtout les *Vorlesungen ueber Dynamik* de Jacobi. *Voir* aussi la *Mécanique céleste* de M. Tisserand.

11. Trouver une surface dans laquelle la portion de normale comprise entre le point d'incidence et un plan fixe soit constante.

12. Trouver les surfaces dont la normale rencontre un cercle fixe.

13. Intégrer l'équation obtenue en égalant le hessien d'une fonction à zéro.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES ET ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

I. — Définitions.

Si l'on considère un système d'équations différentielles ordinaires simultanées, il pourra arriver qu'un certain nombre de ces équations, à elles seules, et sans qu'il soit nécessaire de considérer les autres équations, permettent d'écrire des intégrales du système. S'il arrive que sur m équations données entre m fonctions inconnues, il s'en trouve $n < m$, telles que l'on puisse en déduire n intégrales du système, on dit que ces n équations constituent un système d'*équations aux différentielles totales.*

Pour que n équations forment un système d'équations aux différentielles totales, il suffit évidemment qu'il existe des systèmes de facteurs qui, appliqués à ces équations, fassent de leurs premiers membres, quand on les ajoute, des différentielles exactes. Cette condition est d'ailleurs nécessaire, du moins tant que les différentielles ne dépassent pas le premier ordre, ce que nous supposerons.

En effet, considérons les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_m\,dx_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_1\,dx_1 + R_2\,dx_2 + \ldots + R_m\,dx_m = 0 \end{cases}$$

au nombre de $n < m$. Si, à elles seules, elles permettent d'écrire n intégrales du système, d'ailleurs quelconque, dont

elles peuvent être censées faire partie, on pourra écrire ces intégrales sous la forme

$$(2)\quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n;$$

et, en tirant n des variables $x_1, x_2, \ldots$ en fonction des autres, pour les porter dans (1), on devra avoir des identités satisfaites, quels que soient les autres x, et quelles que soient les constantes $c_1, c_2, \ldots$; or de (2) on tire

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} dx_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0; \end{cases}$$

tirons de là $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ en fonction de $dx_{n+1}, \ldots dx_m$, et portons-les dans (1), ce qui revient à les éliminer entre (1) et (3), les résultantes seront des identités, si l'on y suppose $x_1, x_2, \ldots, x_n$ déduits de (2), c'est-à-dire quels que soient $x_{n+1}, \ldots, x_m$ et $c_1, \ldots, c_n$; mais $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant arbitraires, il en est de même de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si bien que, les résultantes ne contenant pas $c_1, c_2, \ldots c_n$, on peut dire qu'elles ont lieu, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x_{n+1}, \ldots, x_m$. Les systèmes (1) et (3) rentrent alors l'un dans l'autre, (3) sont des combinaisons de (1), d'où résulte, comme l'on voit, l'existence des facteurs dont nous avons parlé.

Les équations (1) peuvent être envisagées à un point de vue un peu différent, et leurs intégrales montrent que l'on peut considérer n des variables x comme fonctions des autres. Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ces variables et par $x_1, x_2, \ldots, x_i$ les variables dont elles dépendent : le système (1) pourra se présenter sous la forme

$$\begin{gathered} du_1 = X_{11}\, dx_1 + X_{12}\, dx_2 + \ldots + X_{1i}\, dx_i, \\ du_2 = X_{21}\, dx_1 + X_{22}\, dx_2 + \ldots + X_{2i}\, dx_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

et, à ce point de vue, sera équivalent aux systèmes

$$X_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad X_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad X_{1i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i},$$
$$X_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad X_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad X_{2i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

C'est ordinairement à ce point de vue que l'on se place dans les applications; on conçoit dès lors que les fonctions X soient assujetties à remplir certaines conditions, pour que les équations proposées admettent des solutions.

Quand les X ne contiennent pas les variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, la question rentre dans l'une de celles que nous avons déjà résolues (p. 198, t. III). Dans le cas contraire, de nouveaux principes sont nécessaires pour trancher la question.

II. — Conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux différentielles totales.

Étant donné un système d'équations aux différentielles totales du premier ordre, on peut toujours le supposer ramené à la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} du_1 = X_{11}\,dx_1 + X_{12}\,dx_2 + \ldots + X_{1n}\,dx_n, \\ du_2 = X_{21}\,dx_1 + X_{22}\,dx_2 + \ldots + X_{2n}\,dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ du_m = X_{m1}\,dx_1 + X_{m2}\,dx_2 + \ldots + X_{mn}\,dx_n, \end{array} \right.$$

X_{ij} désignant, en général, une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous désignerons par un d les différentielles prises en regardant $u_1, u_2, \ldots, u_m$ comme fonctions de x_1, $x_2, \ldots, x_n$ considérés comme seules variables indépendantes; au contraire, ∂ servira à représenter des différentielles, ou plutôt des dérivées prises en regardant u_1, $u_2, \ldots, u_m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des variables indépendantes. Ainsi, par exemple, on aura

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_1}.$$

Ceci posé, pour que le système (1) soit intégrable, il faut que, $u_1, u_2, \ldots$ étant exprimés en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les seconds membres soient des différentielles exactes; il faut donc que l'on ait, en général,

$$\frac{dX_{ij}}{dx_k} = \frac{dX_{ik}}{dx_j},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} + \sum_\mu \frac{\partial X_{ij}}{\partial u_\mu} \frac{du_\mu}{dx_k} = \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_j} + \sum_\mu \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_\mu} \frac{du_\mu}{dx_j}$$

ou

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_j} + \sum_\mu \left(\frac{\partial X_{ij}}{\partial u_\mu} \frac{du_\mu}{dx_k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_\mu} \frac{du_\mu}{dx_j} \right) = 0.$$

Mais, si l'on remarque qu'en vertu des équations (1) supposées satisfaites $\frac{du_\mu}{dx_k} = X_{\mu k}$, cette équation deviendra

$$(2) \qquad \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_j} + \sum_\mu \left(\frac{\partial X_{ij}}{\partial u_\mu} X_{\mu k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial u_\mu} X_{\mu j} \right) = 0.$$

Cette équation et ses analogues doivent être identiquement satisfaites quand on y remplace $u_1, u_2, \ldots, u_m$ par leurs valeurs que l'on suppose exister. Deux cas peuvent alors se présenter et qu'il faut soigneusement distinguer : 1° les équations (1) admettent une solution renfermant m constantes arbitraires et sont *complètement intégrables;* alors les équations (2) devant avoir lieu, quelles que soient ces constantes, après que l'on a remplacé les u par leurs valeurs, sont déjà des identités, c'est-à-dire ont lieu quels que soient les u et les x; 2° les équations (2) ne deviennent identiques que pour certaines valeurs des u qui satisfont à (1) et qui ne renferment pas m constantes arbitraires, les équations (1) ne sont pas alors *complètement* intégrables.

III. — Intégration d'un système d'équations aux différentielles totales.

Nous venons de voir que, si les équations (1) sont satisfaites, pour des valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ renfermant m constantes arbitraires, les équations (2) sont identiques; nous allons démontrer que, réciproquement, si les équations (2) sont identiques, ces équations sont *complètement intégrables,* c'est-à-dire qu'elles admettent pour solutions des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ renfermant m constantes arbitraires. Nous verrons toutefois que ces conditions (2) ne sont pas tout à fait nécessaires, en ce sens qu'elles sont satisfaites identiquement quand elles le sont pour certaines valeurs des variables : c'est ce que nous allons établir.

Commençons par déterminer les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ au moyen des équations différentielles ordinaires

$$(3)\quad du_1 = X_{11}\,dx_1, \qquad du_2 = X_{21}\,dx_1, \qquad \ldots, \qquad du_m = X_{m1}\,dx_1;$$

en regardant $x_2, x_3, \ldots, x_n$ comme des constantes; l'intégration introduira alors m constantes que l'on supposera fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Écrivons ainsi les équations (3) :

$$(3\ bis)\quad \frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \qquad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1},$$

et différentions-les par rapport à x_i; nous aurons

$$\frac{d^2 u_n}{dx_1\,dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\,\frac{du_1}{dx_i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\,\frac{du_m}{dx_i},$$

formule où l'on doit supposer $p = 1, 2, 3, \ldots, m$; elle peut s'écrire

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\,dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right)$$
$$+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\,X_{1i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\,X_{mi}$$

ou, en vertu de l'identité (2), qu'il suffit de supposer satisfaite pour $k = 1$,

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right) + \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1} X_{11} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m} X_{m1}$$

ou, enfin, en vertu des formules (3 *bis*),

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right) + \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_1}.$$

Cette formule peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{du_p}{dx_i} - X_{pi}\right) = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right);$$

cette équation en fournit m quand on y suppose $p = 1, 2, \ldots, m$ et le système ainsi obtenu est à m inconnues

$$(4) \qquad \frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}, \quad \frac{du_2}{dx_i} - X_{2i}, \quad \ldots, \quad \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}.$$

Intégrons-le en prenant ces inconnues nulles pour $x_1 = x_1^0$; elles seront toujours nulles, en vertu des propriétés connues des intégrales d'un système linéaire et homogène (qui sont linéaires et homogènes par rapport aux constantes d'intégration).

En résumé, si les conditions (2) sont satisfaites pour $k = 1$ et si les expressions (4) sont nulles pour $x_1 = x_1^0$, les équations (1) seront intégrables; cela revient à dire que, si les équations (2) sont satisfaites pour $k = 1$ et si le système

$$(5) \qquad \begin{cases} du_1^0 = X_{12}^0\, dx_2 + \ldots + X_{1n}^0\, dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m^0 = X_{m2}^0\, dx_2 + \ldots + X_{mn}^0\, dx_n \end{cases}$$

est intégrable, l'indice o indiquant que l'on doit faire $x_1 = x_1^0$ le système (1) l'est aussi. Ce dernier système sera intégrable

si les conditions (2) sont satisfaites en supposant $k = 2$, pour $x_1 = x_1^0$ seulement, et si

$$(6)\qquad \begin{cases} du_1^{00} = X_{13}^{00}\, dx_3 + \ldots + X_{1n}^{00}\, dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m^{00} = X_{m3}^{00}\, dx_3 + \ldots + X_{mn}^{00}\, dx_n \end{cases}$$

est intégrable, le double indice o indiquant que l'on doit faire $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, et ainsi de suite. Pour que le système (1) soit intégrable, il n'est donc pas *absolument* nécessaire que l'on sache que les formules (2) ont lieu identiquement, ce qui n'empêchera pas finalement ces équations d'être identiques si le système (1) est complètement intégrable.

Quand on sait que le système (1) est complètement intégrable, la démonstration qui précède montre comment on trouve son intégrale; $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont donnés par les intégrales des équations (3 *bis*), dans lesquelles les constantes d'intégration doivent être choisies de telle sorte que les équations (5) aient lieu. Comme on peut prendre $u_1^0, u_2^0, \ldots$ pour constantes d'intégration, on peut dire que les constantes sont déterminées par le système (5); pour l'intégrer, on formera le système

$$\frac{du_1^0}{dx_2} = X_{12}^0, \qquad \frac{du_2^0}{dx_2} = X_{22}^0, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m^0}{dx_2} = X_{m2}^0,$$

et l'on déterminera les constantes d'intégration au moyen du système

$$\frac{du_1^{00}}{dx_3} = X_{13}^{00}, \qquad \frac{du_2^{00}}{dx_3} = X_{23}^{00}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m^{00}}{dx_3} = X_{m3}^{00},$$

$u_1^{00}, u_2^{00}, \ldots$ étant les constantes d'intégration du système précédent, et ainsi de suite.

IV. — Simplification des calculs.

M. Mayer a observé que, si, en faisant $x_1 = x_1^0$, les quantités X_{ij} pour $j \geqq 2$ étaient nulles, les équations (5) se réduiraient

à $du_1^0 = 0$, $du_2^0 = 0$, ..., en sorte que ces équations donneraient immédiatement

$$u_1^0 = \text{const.}, \qquad u_2^0 = \text{const.}, \qquad \ldots;$$

et, dans ce cas particulier, l'intégration des équations (1) se ramène à l'intégration d'un *seul* système d'équations différentielles ordinaires; or, par un changement de variables très simple, on peut obtenir des équations satisfaisant à la condition en question.

Posons, en effet,

$$x_i = a_i + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_i,$$

α_1^0 et a_i désignant des constantes et f_i une fonction de n nouvelles variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ devront, bien entendu, être distinctes. Alors les équations (1) se changeront en

$$du_1 = \mathrm{Y}_{11}\, d\alpha_1 + \mathrm{Y}_{12}\, d\alpha_2 + \ldots + \mathrm{Y}_{1n}\, d\alpha_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$du_m = \mathrm{Y}_{m1}\, d\alpha_1 + \mathrm{Y}_{m2}\, d\alpha_2 + \ldots + \mathrm{Y}_{mn}\, d\alpha_n;$$

on aura

$$\mathrm{Y}_{i1} = \sum_\mu \mathrm{X}_{i\mu}\left[f_\mu + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\frac{\partial f_\mu}{\partial \alpha_1}\right],$$

$$\mathrm{Y}_{ij} = \sum_\mu \mathrm{X}_{i\mu}(\alpha_1 - \alpha_1^0)\frac{\partial f_\mu}{\partial \alpha_j};$$

mais alors, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, les Y_{i1} ne seront pas nuls, mais les Y_{ij} le seront, pourvu que les fonctions f, arbitraires d'ailleurs, ne soient pas infinies dans ces circonstances.

La manière la plus simple, en général, de choisir les fonctions f consiste à poser

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_i = a_i + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_i.$$

V. — Application à un exemple.

Proposons-nous d'intégrer

(1) $$x_2 x_3\, dx_1 + x_1 x_3\, dx_2 - 2 x_1 x_2\, dx_3 = 0,$$

on peut s'assurer que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites. Pour effectuer l'intégration, on posera

$$x_1 x_3\, dx_2 - 2 x_1 x_2\, dx_3 = 0$$

ou

$$\frac{dx_2}{x_2} = 2\frac{dx_3}{x_3};$$

on en conclura

$$(2) \qquad \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3^2}{(x_3^0)^2}.$$

En marquant de l'indice o les valeurs initiales des variables, puis faisant dans (1) $x_2 = x_2^0$, on aura

$$dx_1\, x_2^0 x_3^0 - 2 x_1 x_2^0\, dx_3^0 = 0,$$

d'où

$$2\frac{dx_3^0}{x_3^0} = \frac{dx_1}{x_1}$$

et, par suite,

$$\frac{x_1}{x_1^0} = \frac{(x_3^0)^2}{(x_3^{00})^2};$$

l'élimination de x_3^0 entre cette équation et (2) donne

$$\frac{x_1 x_2}{x_1^0 x_2^0} = \frac{x_3^2}{(x_3^{00})^2}$$

ou, si l'on veut,

$$x_3^2 = c x_1 x_2,$$

c désignant une constante; on a, en effet,

$$2 x_3\, dx_3 = c x_1\, dx_2 + c x_2\, dx_1;$$

l'élimination de c donne bien (1).

VI. — Cas où les conditions d'intégrabilité complète ne sont pas identiquement satisfaites.

Reprenons les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} du_1 = X_{11}\, dx_1 + X_{12}\, dx_2 + \ldots + X_{1n}\, dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ du_m = X_{m1}\, dx_1 + X_{m2}\, dx_2 + \ldots + X_{mn}\, dx_n. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une solution renfermant m constantes arbitraires, il faut que les relations

$$(2) \qquad \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_{kj}}{\partial x_i} + \sum \left(\frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu} X_{\mu j} - \frac{\partial X_{kj}}{\partial u_\mu} X_{\mu i} \right) = 0$$

soient satisfaites quels que soient les u et les x. Mais il n'est pas nécessaire qu'il en soit ainsi pour que les équations (1) aient *des* solutions ne renfermant pas de constantes ou renfermant moins de m constantes; si, en effet, ces équations (2) (*voir* p. 115), étaient toutes satisfaites pour certaines valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (ce que l'on pourra vérifier), il y aurait lieu de chercher si, par hasard, ces valeurs de u_1, $u_2, \ldots, u_m$ ne seraient pas des intégrales des équations (1); cette vérification ne présentera d'ailleurs aucune difficulté. Les solutions que l'on peut trouver ainsi sont ce que l'on appelle des intégrales *singulières*.

La théorie des équations simultanées aux différences totales a été exposée d'une autre manière par M. Mayer (*Bulletin des Sc. mathém.*, septembre 1876). Bouquet démontre les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète par les séries (*Bulletin des Sc. mathém.*, septembre 1876). *Voir* aussi Méray, *Précis d'Analyse*.

VII. — Classification des solutions des équations simultanées aux dérivées partielles à une inconnue.

Si l'on écrit au hasard plusieurs équations aux dérivées partielles entre une seule fonction inconnue u, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les dérivées $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$, ces équations ne seront pas en général compatibles; toutefois, on conçoit qu'une même fonction u puisse quelquefois satisfaire à plusieurs équations, sans toutefois que ces équations soient algébriquement identiques.

Nous dirons que plusieurs équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0$$

forment un système *complètement intégrable,* ou même simplement un système *intégrable,* s'il existe une fonction u satisfaisant à toutes les équations (1) et renfermant $n - m + 1$ constantes arbitraires; n désignant le nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et m le nombre des équations du système.

Lorsqu'un système tel que (1) admet une intégrale complète

$$(2) \qquad F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_\mu) = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ désignant $\mu = n - m + 1$ constantes arbitraires, on peut reproduire le système (1) en éliminant les a entre (2) et ses dérivées

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \ldots,$$

car $u, p_1, p_2, \ldots, p_n$ tirés de (2) et (3) doivent rendre (1) identique; les équations (1) sont donc des conséquences de (2) et (3) ne contenant pas les a; ce sont donc les résultantes provenant de l'élimination des a entre (2) et (3).

C. Q. F. D.

Pour qu'une solution puisse être considérée comme complète, il faut que les constantes a soient *distinctes,* c'est-à-dire que les formules (1) soient les résultantes uniques de (2) et (3).

La méthode de la variation des constantes de Lagrange, exposée à propos d'une seule équation, permet de généraliser une solution complète et d'en déduire : 1° une intégrale dite *générale* se réduisant pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_{\mu-n} = \xi_{\mu-n}$ à une fonction arbitraire des autres variables x; 2° d'autres moins générales et que l'on doit considérer comme *singulières.*

Mais les équations (1) peuvent encore admettre des solutions *singulières*, sans posséder d'intégrale complète, comme nous le verrons dans la suite. Il existe des conditions qui expriment que les équations (1) possèdent une intégrale complète; nous les appellerons *conditions d'intégrabilité complète* ou, tout simplement, pour abréger le langage, *conditions d'intégrabilité* du système (1).

VIII. — Théorèmes sur les équations aux différentielles totales et les équations simultanées aux dérivées partielles.

Considérons un système d'équations aux différentielles totales

$$(1)\quad \begin{cases} du_1 = X_{11}\,dx_1 + X_{12}\,dx_2 + \ldots + X_{1n}\,dx_n, \\ du_2 = X_{21}\,dx_1 + X_{22}\,dx_2 + \ldots + X_{2n}\,dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m = X_{m1}\,dx_1 + X_{m2}\,dx_2 + \ldots + X_{mn}\,dx_n. \end{cases}$$

Supposons ce système intégrable (et par là nous entendons qu'il admet une solution renfermant m constantes arbitraires); soit

$$(2)\qquad \varphi = \alpha$$

une intégrale de ce système, φ désignant une fonction des u et des x et α désignant une constante arbitraire. Dire que $\varphi = \alpha$ est une intégrale de (1), c'est admettre que l'on peut adjoindre à (2) $m - 1$ autres équations, $\varphi_1 = \alpha_1$, ..., $\varphi_{m-1} = \alpha_{m-1}$, telles que les valeurs de u_1, u_2, ..., u_m, tirées de là et portées dans (1), rendent ces équations identiques quels que soient x_1, x_2, ..., x_n et α, α_1, ..., α_{m-1}, et l'on peut même ajouter, quelles que soient les fonctions de x_1, x_2, ... que l'on mette à la place de α, α_1, ..., α_{m-1}.

Ceci revient à dire que les valeurs de u_1, u_2, ... tirées de (2) et de ses analogues rendent identiques les équations

$$(3)\qquad \frac{du_i}{dx_j} = X_{ij}.$$

Différentions donc (2) et ses analogues, pour en tirer les $\frac{du_i}{dx_j}$; nous aurons

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dx_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dx_1} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_m}\dfrac{du_m}{dx_1} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dx_2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dx_2} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_m}\dfrac{du_m}{dx_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

si l'on tire les $\frac{du_i}{dx_j}$ de là pour les porter dans (3), les équations ne seront peut-être pas identiques ; mais elles le deviendront, si l'on suppose les u remplacés par leurs valeurs tirées de (2) et de ses analogues : alors il faut qu'elles soient identiques avant cette substitution aux u de leurs valeurs tirées de (2), puisque, les α étant arbitraires, on peut supposer les relations (3) satisfaites quels que soient les u. Ceci revient à dire que l'élimination des $\frac{du_i}{dx_j}$ entre (3) et (4) fournit des identités : or l'élimination peut se faire en remplaçant dans (4) $\frac{du_i}{dx_j}$ par X_{ij}; on a donc les identités

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} X_{11} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} X_{21} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_m} X_{m1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} X_{1n} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} X_{2n} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_m} X_{mn} = 0; \end{cases}$$

donc *toute intégrale* $\varphi = \alpha$ *du système* (1) *fournit une intégrale* φ *commune aux équations dérivées partielles simultanées* (4).

Réciproquement : toute intégrale commune aux équations (5) *égalée à une constante arbitraire fournit une intégrale du système* (1).

En effet, les formules (5) étant identiques, en les combinant avec (3), on aura des équations (4) identiques à (3) ou équivalentes à (3); or, les équations (4) ayant lieu, on a $d\varphi = 0$;

donc $\varphi =$ const. est une conséquence de (3) ou, ce qui revient au même, de (1). C. Q. F. D.

Il résulte de là que, quand on saura trouver m solutions communes aux équations (5) ou, ce qui revient au même, une solution renfermant m constantes arbitraires, outre celle que l'on peut toujours ajouter à une solution quelconque, ce qui constitue une intégrale complète quand on les combine linéairement, on pourra intégrer le système (1) et que, *vice versa*, sachant et pouvant intégrer le système (1), son intégrale la plus générale $F(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}) =$ const. fournira l'intégrale la plus générale $F(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})$ commune aux équations (5).

Les conditions d'intégrabilité complète d'un système, tel que (5), sont, comme l'on voit, les mêmes que les conditions d'intégrabilité du système (1).

IX. — Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles.

Considérons d'abord le système suivant d'équations simultanées aux dérivées partielles, mais à une seule fonction inconnue u,

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t_1} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = f_2 \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t_m} = f_m,$$

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ désignant des fonctions données des variables $t_1, t_2, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de la fonction u prises respectivement par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$; nous supposerons que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ne contiennent pas la fonction inconnue u elle-même.

Si le système considéré (1) admet une solution, on devra avoir

$$(2)\qquad du = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n + f_1\,dt_1 + \ldots + f_m\,dt_m.$$

Supposons que l'on change de variables et qu'à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on substitue de nouvelles variables, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_m$ et que je désignerai par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si

l'on convient de désigner par un d les différentielles totales prises en faisant varier les t et en laissant les α constants, et par un δ les différentielles prises en faisant varier les α et en laissant les t constants, la condition (2) pourra être remplacée par les deux équations

$$(3)\qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n + f_1\,dt_1 + \ldots + f_m\,dt_m,$$

$$(4)\qquad \delta u = p_1\,\delta x_1 + p_2\,\delta x_2 + \ldots + p_n\,\delta x_n,$$

où du, dx_1, ... n'ont plus le même sens que dans (2). Si la solution existe, elle sera donnée en intégrant la formule (3), et l'on aura, en désignant par c une fonction des α, à laquelle se réduit u pour $t_1 = a_1$, $t_2 = a_2$, ..., $t_m = a_m$,

$$(3\ bis)\qquad u = c + \int (p_1\,dx_1 + \ldots + f_1\,dt_1 + \ldots),$$

l'intégrale étant prise par rapport aux t en laissant les α constants, de manière à s'annuler pour $t_1 = a_1, \ldots, t_m = a_m$. Cette formule différentiée avec la caractéristique δ donne

$$\delta u = \delta c + \int (\delta p_1\,dx_1 + p_1\,\delta\,dx_1 + \ldots + \delta f_1\,dt_1 + \ldots)$$

ou encore, en appelant ϖ_i et ξ_i les valeurs de p_i et x_i pour $t_1 = a_1$, $t_2 = a_2$, ...,

$$\begin{aligned}\delta u = \delta c &+ p_1\,\delta x_1 + \ldots + p_n\,\delta x_n - \varpi_1\,\delta\xi_1 - \ldots - \varpi_n\,\delta\xi_n \\ &+ \int (\delta p_1\,dx_1 - dp_1\,\delta x_1 + \ldots + \delta f_1\,dt_1 + \delta f_2\,dt_2\ \ldots);\end{aligned}$$

on aura évidemment satisfait aux formules (3) et (4) si l'on pose

$$(5)\qquad \delta c = \varpi_1\,\delta\xi_1 + \varpi_2\,\delta\xi_2 + \ldots + \varpi_n\,\delta\xi_n,$$

et si l'on peut égaler à zéro la quantité placée sous le signe $\int$. Nous pouvons annuler cette quantité en annulant séparément les coefficients des δp et des δx. On obtient ainsi un

système d'équations aux différentielles totales que voici :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} -dx_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1}dt_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial p_1}dt_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_m}{\partial p_1}dt_m, \\ -dx_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}dt_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial p_2}dt_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_m}{\partial p_2}dt_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dp_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dt_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dt_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dt_m, \\ dp_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dt_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dt_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}dt_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Supposons ce système (6) intégrable et intégré avec $2n$ constantes arbitraires, fonctions des α bien entendu. Supposons de plus l'équation (3) également intégrable quand aux dx on aura substitué leurs valeurs tirées de (6). Les équations (3) et (4) seront satisfaites si l'on peut en même temps satisfaire à (5). On peut y satisfaire comme il suit :

Intégrons le système (6), (3), de telle sorte que, pour $t_1 = a_1$, $t_2 = a_2, \ldots$, on ait $x_1 = \xi_1 = \alpha_1$, $x_2 = \xi_2 = \alpha_2, \ldots, p_1 = \varpi_1$, $p_2 = \varpi_2, \ldots$ et $u = c$. La formule (5) sera satisfaite en posant

$$(7)\quad c = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad \varpi_1 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \qquad \varpi_2 = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \qquad \ldots.$$

Les intégrales de (6), (3), où les ξ, les ϖ et c seront liés par les relations (7), feront connaître les p, les x et u en fonction des α ou des ξ, et l'élimination des ξ, ϖ, c et des p entre les intégrales de (6), (3) et (7) fera connaître u.

La valeur de u ainsi calculée se réduira à $F(x_1, \ldots, x_n)$ pour $t_1 = a_1$, $t_2 = a_2, \ldots$ (p. 19).

Mais on peut aussi diriger l'intégration autrement; si l'on suppose en effet $\delta\xi_1 = 0$, $\delta\xi_2 = 0, \ldots$, ou les ξ constants avec $\delta u = 0$, l'équation (5) sera encore satisfaite, de sorte que l'on aura encore une intégrale en éliminant les ϖ entre les intégrales de (6), (3). Cette intégrale renfermera les constantes arbitraires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Ce sera une *intégrale complète*.

Quand on connaît une intégrale complète d'un système d'équations simultanées, tel que (1), la méthode de Lagrange exposée pour le cas d'une seule équation permet de trouver la solution commune la plus générale, laquelle renferme une fonction arbitraire.

Réciproquement, *si l'on connaît une solution* V *commune aux équations* (1) *renfermant* n *constantes arbitraires* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *abstraction faite de celle que l'on peut toujours ajouter à* V, *le système* (6), (3) *sera intégrable.*

En effet, posons

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = p_1, & \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = p_2, & \ldots, & \dfrac{\partial V}{\partial x_n} = p_n, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \xi_1} = -\varpi_1, & \dfrac{\partial V}{\partial \xi_2} = -\varpi_2, & \ldots, & \dfrac{\partial V}{\partial \xi_n} = -\varpi_n, \end{cases}$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ désignant des constantes arbitraires; je dis que ce seront les intégrales du système (6). Pour le prouver, représentons par un d une différentielle prise en faisant seulement varier les t, et par un δ une différentielle prise en faisant varier seulement les ϖ et les ξ; nous aurons

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial V}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \ldots$$

ou bien, en vertu de (1) et (8),

$$dV = f_1\, dt_1 + f_2\, dt_2 + \ldots + p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$(9)\qquad \delta\, dV = \sum \delta f\, dt + \sum p\, \delta\, dx + \sum \delta p\, dx.$$

D'un autre côté, on a

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \sum \frac{\partial V}{\partial \xi} \delta \xi$$

ou, en vertu de (8),

$$\delta V = \sum p\, \delta x - \sum \varpi\, \delta \xi,$$

d'où

$$d\,\delta V = \sum dp\,\delta x + \sum p\,\delta dx.$$

Cette équation retranchée de (9) donne

$$0 = \sum \delta f\,dt + \sum \delta p\,dx - \sum dp\,\delta x;$$

or, les $\delta\xi$ et les $\delta\varpi$ étant arbitraires, il en sera de même des δp et des δx. On pourra donc égaler leurs coefficients à zéro, après avoir développé les δf. On trouve alors les équations (6); donc (8) sont les intégrales de (6). C. Q. F. D.

L'équation

$$du = \sum p\,dx + \sum f\,dt$$

est alors intégrable; car, en vertu de (1) et (8), elle se réduit à

$$du = \sum \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \sum \frac{\partial u}{\partial t}\,dt;$$

donc l'intégrabilité du système (1) entraîne celle des équations (6) et (8) et *vice versa*.

Tout système d'équations simultanées aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue peut se ramener à la forme (1). En effet, on peut d'abord faire disparaître la fonction inconnue elle-même par l'emploi de l'un des procédés indiqués par Jacobi (p. 53) pour le cas d'une seule équation. et résoudre ensuite le système proposé par rapport aux dérivées $\frac{\partial u}{\partial t_1} = f_1$, $\frac{\partial u}{\partial t_2} = f_2$, ... Si cette résolution est impossible ou si même elle paraît incommode, on pourra se dispenser de le faire en calculant les quantités $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \frac{\partial f_2}{\partial p_2}, \dots$ par la méthode des fonctions implicites et en substituant leurs valeurs dans les équations (6); mais alors à ces équations (6) et à l'équation (3) il faudra adjoindre les équations proposées qui servent à définir les f, lesquels f entreront dans les équations auxiliaires (6) modifiées comme il vient d'être dit.

X. — Conditions d'intégrabilité d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles.

D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, les conditions d'intégrabilité d'un système, tel que

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t_1} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t_m} = f_m,$$

doivent être les mêmes que les conditions d'intégrabilité du système d'équations aux différentielles totales que l'on pourrait appeler *canonique*

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -dx_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\,dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\,dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial p_1}\,dt_m,\\ -dx_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\,dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial p_2}\,dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial p_2}\,dt_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ dp_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\,dt_m,\\ dp_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\,dt_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad du = \sum f\,dt + \sum p\,dx.$$

Or les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f_j}{\partial p_i \partial t_k} + \sum_\mu \frac{\partial^2 f_j}{\partial p_i \partial p_\mu}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_\mu} - \sum_\mu \frac{\partial^2 f_j}{\partial p_i \partial x_\mu}\,\frac{\partial f_k}{\partial p_\mu}\\ &\quad = \frac{\partial^2 f_k}{\partial p_i \partial t_j} + \sum_\mu \frac{\partial^2 f_k}{\partial p_i \partial p_\mu}\,\frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} - \sum_\mu \frac{\partial^2 f_k}{\partial p_i \partial x_\mu}\,\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu}, \end{aligned}$$

et d'autres équations analogues obtenues en changeant p_i en x_i. Cette formule et ses analogues, en posant

$$\sum_\mu \left(\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial f_k}{\partial p_\mu} \right) = (f_k, f_j),$$

deviennent

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}-(f_j, f_k)\right]=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}-(f_j, f_k)\right]=0,\end{aligned}\right.$$

et, par suite, pour que les équations (2) soient intégrables, il faut et il suffit que les expressions

$$\frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}-(f_j, f_k)$$

soient indépendantes des x et des p. Maintenant, pour que, en outre, (3) ou

$$du=\sum\left(f_\mu-p_1\frac{\partial f_\mu}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f_\mu}{\partial p_2}-\ldots\right)dt_\mu=0$$

soit intégrable, il faut que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_k}\left(f_j-p_1\frac{\partial f_j}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f_j}{\partial p_2}-\ldots\right)+\sum_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(f_j-p_1\frac{\partial f_j}{\partial p_1}-\ldots\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_\mu}\\ &\qquad-\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(f_j-p_1\frac{\partial f_j}{\partial p_1}-\ldots\right)\frac{\partial f_k}{\partial p_\mu}\\ &=\frac{\partial}{\partial t_j}\left(f_k-p_1\frac{\partial f_k}{\partial p_1}-p_1\frac{\partial f_k}{\partial p_2}-\ldots\right)+\sum_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(f_k-p_1\frac{\partial f_k}{\partial p_1}-\ldots\right)\frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\\ &\qquad-\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(f_k-p_1\frac{\partial f_k}{\partial p_1}-\ldots\right)\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu}.\end{aligned}$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}-\sum_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}\right)p_\mu+2(f_j, f_k)\\ &\qquad-\sum_\mu p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}(f_j, f_k)-3(f_j, f_k)-\sum_\mu p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}(f_j, f_k)=0\end{aligned}$$

et, en vertu des relations (4),

$$(5)\qquad \frac{\partial f_j}{\partial t_k}-\frac{\partial f_k}{\partial t_j}-(f_j, f_k)=0;$$

telles sont les conditions d'intégrabilité complète du système (1).

On peut trouver les conditions d'intégrabilité d'un système de n équations aux dérivées partielles du premier ordre, sans pour cela avoir besoin de le résoudre par rapport à m dérivées. En effet, si l'on suppose $t_1 = x_{n+1}, \ldots, t_m = x_{n+m}$, $\frac{\partial u}{\partial t_1} = p_{n+1}, \frac{\partial u}{\partial t_2} = p_{n+2}, \ldots$ et si l'on fait

$$(f_j, f_k) = \sum_{\mu=1}^{\mu=m+n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu} \frac{\partial f_k}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_k}{\partial p_\mu} \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} \right),$$

l'équation (5) pourra être remplacée par la suivante

$$(6) \qquad (f_j, f_k) = 0,$$

le symbole (f_i, f_k) n'ayant plus le même sens que dans l'équation (5); on peut d'ailleurs écrire (6) ainsi

$$(6\ bis) \qquad (p_{n+j}, p_{n+k}) = 0,$$

p_{n+j}, p_{n+k} étant tirés des équations proposées en fonction des x, des t et des autres p. Supposons que les équations données soient de la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} F_1(p_1, p_2, \ldots, p_{m+n}, x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = 0, \\ F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0; \end{cases}$$

on a, en général, en appelant α, β des fonctions de $F_1, \ldots, F_m$,

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \sum_\mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_\mu} \frac{\partial \beta}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \beta}{\partial p_\mu} \right) \\ &= \sum_{i,j,\mu} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial p_\mu} \frac{\partial \beta}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \beta}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial p_\mu} \right) \\ &= \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial F_i} \frac{\partial \beta}{\partial F_j} - \frac{\partial \alpha}{\partial F_j} \frac{\partial \beta}{\partial F_i} \right) (F_i, F_j).\end{aligned}$$

Supposons que l'on prenne $\alpha = F_k$, $\beta = F_l$ et que les variables F soient précisément $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$; cette formule deviendra

$$(F_k, F_l) = \sum \frac{\partial(F_k, F_l)}{\partial(p_{n+i}, p_{n+j})} (p_{n+i}, p_{n+j}),$$

donc les formules (6) entraînent les suivantes :

$$(8) \qquad (F_k, F_l) = 0.$$

Réciproquement, les formules (8) entraînent (6); car, en prenant pour α, β deux des quantités p_{n+i}, on a

$$(\alpha, \beta) = \sum \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(F_i, F_j)} (F_i, F_j),$$

c'est-à-dire, si les formules (8) ont lieu,

$$(p_{n+i}, p_{n+j}) = 0;$$

ainsi, *pour que le système*

(9) $F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$

dans lequel $F_1, F_2, \ldots$ *désignent des fonctions de* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *et de* $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$, *soit intégrable complètement, il faut et il suffit que* $(F_i, F_j) = 0$ *en tenant compte de* (9).

XI. — Intégration d'un système qui ne possède pas de solution complète.

L'intégration d'un système qui ne possède pas de solution complète a été ramené par Bour [XXXIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*Mémoires sur les équations différentielles du premier et du second ordre*)] à l'intégration d'un nouveau système possédant une telle solution.

Soient

(1) $F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0$

les équations à intégrer :

1° Si les équations $(F_i, F_j) = 0$ sont identiques, ou le deviennent en vertu de (1), on appliquera aux équations (1), complètement intégrables, la méthode exposée plus haut, ou toute autre méthode permettant de calculer l'intégrale complète qui existe.

2° Si les conditions $(F_i, F_j) = 0$ ne sont pas satisfaites et si l'on a, par exemple,

$$(F_i, F_j) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les équations n'ont pas de solution commune. En effet, si cette solution existait, on devrait pouvoir adjoindre à (1) de nouvelles équations $F_{m+1} = 0, \ldots, F_n = 0$, telles que l'on ait précisément

$$(F_i, F_j) = 0$$

pour toutes les valeurs de i et j moindres que $n+1$, et d'où l'on puisse tirer les p.

3° Il pourra se faire que l'on ait

$$(F_i, F_j) = \psi_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Dans ce cas, il faudra voir si les équations

$$(F_i, F_j) = 0$$

jointes aux équations (1) peuvent former un système se réduisant au plus à n équations distinctes, et dans ce cas, voir si ces équations satisfont aux conditions d'intégrabilité. Si les équations (1) et $(F_i, F_j) = 0$ forment un système de plus de n équations distinctes, le système (1) n'admet pas de solution. S'il forme un système de n ou de moins de n équations, il pourra se présenter deux cas : 1° ou les conditions d'intégrabilité sont satisfaites pour le nouveau système et sa solution complète sera solution de (1); 2° ou les conditions en question ne sont pas satisfaites, et alors il faudra traiter le nouveau système comme le système (1), et l'on finira par décider, en continuant ainsi, s'il y a ou s'il n'y a pas de solution commune aux équations (1).

XII. — Problème de Pfaff.

Pfaff a fait connaître, en 1814, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, une méthode pour l'intégration d'une équation aux différentielles totales, qui a une grande importance

parce qu'elle a été le point de départ des travaux de Jacobi sur les équations aux dérivées partielles; nous allons l'exposer. Le problème de Pfaff consiste, *étant donnée l'équation aux différentielles totales*

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sont fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *à la remplacer par une autre renfermant une variable de moins.*

Un changement de variable consistant à remplacer x_1, x_2, ... par des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de ces variables transforme cette équation en une autre de la forme

$$Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n = 0,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots$ sont fonctions de $y_1, y_2, \ldots$; mais on ne peut pas demander que $Y_1 = 0$ et que $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ ne contiennent plus y_1; en effet, pour résoudre ce problème, il faudrait poser

$$Y_1 = 0, \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} = 0,$$

et ces équations ne sauraient en général avoir de solutions laissant $y_1, y_2, \ldots, y_n$ variables.

Mais on arrive au but que l'on se propose en supposant $Y_1 = 0$ et en faisant en sorte que y_1 n'entre qu'en facteur dans $Y_2, \ldots, Y_n$; nous sommes ainsi conduits à chercher la solution du problème suivant :

Étant donnée l'expression différentielle suivante, dans laquelle la notation dU *ne représente pas nécessairement une différentielle exacte,*

$$dU = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

on propose de la transformer en

$$dU = Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

les quantités $Y_1, Y_2, \ldots$ *satisfaisant aux conditions*

$$(2) \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = Z_2 N, \qquad \ldots, \qquad Y_n = Z_n N,$$

$Z_2, \ldots, Z_n$ *ne contenant pas* y_1

Les équations (2) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(2\ bis) \qquad \frac{d \log Y_2}{dy_1} = \frac{d \log Y_3}{dy_1} = \ldots = h, \qquad Y_1 = 0$$

en désignant par h la quantité $\frac{d \log N}{dy_1}$. Dans la suite, nous désignerons par un d une différentielle relative à y_1, les variables $y_2, \ldots, y_n$ restant constantes, et par un δ une différentielle prise en faisant varier $y_2, \ldots, y_n$, mais en laissant y_1 constant, et nous poserons

$$(3) \qquad \delta U = X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + X_n \delta x_n,$$

$$(4) \qquad dU = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n.$$

Nous déduirons de là

$$d\delta U = \sum dX_i \delta x_i + \sum X_i \delta dx_i,$$

$$\delta dU = \sum \delta X_i dx_i + \sum X_i \delta dx_i$$

et, par suite,

$$\delta dU - d\delta U = \sum (\delta X_i dx_i - dX_i \delta x_i),$$

ou bien, en développant δX_i et dX_i,

$$\delta dU - d\delta U = \sum \Bigg[\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \ldots \right) dx_i - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \right) \delta x_i \Bigg],$$

ce que l'on peut écrire

$$\delta dU - d\delta U = \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_j.$$

En posant

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i},$$

cette formule devient

$$(5)\qquad \delta d\mathrm{U} - d\delta\mathrm{U} = \sum a_{ij}\, dx_i\, \delta x_j;$$

on trouverait, d'une façon analogue,

$$\delta d\mathrm{U} - d\delta\mathrm{U} = \sum b_{ij}\, dy_i\, \delta y_j,$$

$$b_{ii} = 0, \qquad b_{ij} = -b_{ji} = \frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathrm{Y}_j}{\partial y_i},$$

et, comme $dy_2, \ldots, dy_n, \delta y_1$ sont nuls, on a seulement

$$\delta d\mathrm{U} - d\delta\mathrm{U} = \sum b_{1j}\, dy_1\, \delta y_j,$$

et Y_1 étant nul, $b_{1j} = -\dfrac{d\mathrm{Y}_j}{dy_1}$, et même, en vertu de ($2\,bis$), $b_{1j} = -h\mathrm{Y}_j$, en sorte que

$$(6)\qquad \delta d\mathrm{U} - d\delta\mathrm{U} = -\sum h\mathrm{Y}_j\, dy_1\, \delta y_j.$$

Or Y_j est le coefficient de dy_j dans $d\mathrm{U}$, et

$$\begin{aligned} d\mathrm{U} &= \mathrm{X}_1\, dx_1 + \ldots + \mathrm{X}_n\, dx_n \\ &= \left(\mathrm{X}_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right) dy_1 + \ldots \\ &\quad + \left(\mathrm{X}_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right) dy_j + \ldots; \end{aligned}$$

on a donc

$$\mathrm{Y}_j = \sum_i \mathrm{X}_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j};$$

la formule (6) devient alors

$$\delta d\mathrm{U} - d\delta\mathrm{U} = -h\, dy_1 \sum \delta y_j \left(\mathrm{X}_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right)$$

et, en vertu de (5),

$$\sum a_{ij}\, dx_i\, \delta x_j = -h\, dy_1 \sum \delta y_j \left(\mathrm{X}_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \ldots - \mathrm{X}_n \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &\sum a_{ij}\, dx_i \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_2}\, \delta y_2 + \ldots + \frac{\partial x_j}{\partial y_n}\, \delta y_n\right) \\ &\quad = -h\, dy_1 \sum \delta y_j \left(\mathrm{X}_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right). \end{aligned}$$

Égalons les coefficients des quantités $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$, il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} \sum a_{ij}\,dx_i \dfrac{\partial x_j}{\partial y_2} + h\,dy_1\left(X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \ldots + X_n \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2}\right) = 0, \\ \sum a_{ij}\,dx_i \dfrac{\partial x_j}{\partial y_3} + h\,dy_1\left(X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3} + \ldots + X_n \dfrac{\partial x_n}{\partial y_3}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or l'équation $Y_1 = 0$ peut s'écrire

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots = 0,$$

et, comme on a

$$\sum a_{ij}\,dx_i\,dx_j = 0,$$

l'équation précédente pourra se mettre sous la même forme que les équations (7),

$$(7\,bis)\quad \sum a_{ij}\,dx_i \frac{\partial x_j}{\partial y_1} + h\,dy_1\left(X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Le système (7), (7 *bis*) entraîne les équations suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + \ldots + a_{1n}\,dx_n + X_1 h\,dy_1 = 0, \\ a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + \ldots + a_{1n}\,dx_n + X_2 h\,dy_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\,dx_1 + a_{n2}\,dx_2 + \ldots + a_{nn}\,dx_n + X_n h\,dy_1 = 0; \end{cases}$$

car il est linéaire et homogène par rapport aux premiers membres de ces équations. Ce sont les équations (8) qui, comme nous allons le voir, fournissent la solution du problème de Pfaff.

XIII. — Examen des divers cas du problème de Pfaff.

Premier cas : *Le déterminant* $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *n'est pas nul.* — Alors n est nécessairement pair, car le déterminant en question est gauche et symétrique (t. I, p. 162). Dans ce cas, les équations (8) peuvent être résolues par rap-

port à dx_1, dx_2, ..., dx_n. Prenons alors $h=1$, les équations (8) pourront être intégrées, de telle sorte que $n-1$ équations résolues par rapport aux constantes d'intégration ne contiennent pas y_1; une seule intégrale contiendra alors cette variable. Prenons $y_2, y_3, \ldots, y_n$ égaux aux valeurs des constantes qui ne contiennent pas y_1, et tirons y_1 de la $n^{\text{ième}}$ intégrale; il sera déterminé à une constante près : je dis qu'en choisissant ainsi h, y_1, y_2, ..., y_n, le problème de Pfaff sera résolu.

En effet, multiplions les équations (8) par δx_1, δx_2, ..., δx_n respectivement, et ajoutons-les : nous aurons successivement

$$\sum a_{ij}\,dx_j\,\delta x_i + h\,\delta\mathrm{U}\,dy_1 = 0,$$

$$\sum a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j = h\,\delta\mathrm{U}\,dy_1,$$

à cause de $a_{ij} = -a_{ji}$, c'est-à-dire

$$\sum (d\,\delta\mathrm{U} - \delta\,d\mathrm{U}) = h\,\delta\mathrm{U}\,dy_1$$

ou bien

$$\sum b_{ij}\,dy_i\,\delta y_j = h(\mathrm{Y}_1\,\delta y_1 + \ldots + \mathrm{Y}_n\,\delta y_n)\,dy_1;$$

en égalant alors les coefficients de δy_1, δy_2, ..., on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_{11}\,dy_1 + b_{12}\,dy_2 + \ldots + b_{1n}\,dy_n = h\mathrm{Y}_1\,dy_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{n1}\,dy_1 + b_{n2}\,dy_2 + \ldots + b_{nn}\,dy_n = h\mathrm{Y}_n\,dy_1. \end{array}\right.$$

Or on a supposé y_2, y_3, ..., y_n constants; donc dy_2, dy_3, ... sont nuls, et les dernières équations deviennent, en remplaçant b_{11}, b_{21}, ... par leurs valeurs 0, $\dfrac{\partial \mathrm{Y}_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial \mathrm{Y}_1}{\partial y_2}$, $\dfrac{\partial \mathrm{Y}_3}{\partial y_1} - \dfrac{\partial \mathrm{Y}_1}{\partial y_3}$, ...,

$$0 = \mathrm{Y}_1, \qquad \frac{\partial \mathrm{Y}_2}{\partial y_1} = h\mathrm{Y}_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{Y}_3}{\partial y_1} = h\mathrm{Y}_3, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$0 = Y_1, \qquad \frac{\partial \log Y_2}{\partial y_1} = \frac{\partial \log Y_3}{\partial y_1} = \ldots = h = \frac{\partial \log N}{\partial y_1};$$

le problème de Pfaff est donc résolu.

On peut un peu simplifier les calculs en intégrant les équations (8), de telle sorte que pour $y_1 = y_1^0$, on ait $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ...; alors on a

$$Y_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \ldots,$$

et, par suite, comme $y_i = x_i^0$ excepté pour $i = 1$, on a

$$Y_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i^0} + \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i^0}.$$

Faisons, dans cette formule, $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$, ..., nous aurons

$$Y_i = X_i^0,$$

X_i^0 désignant ce que devient X_i pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., en sorte que l'on a

$$dU = (X_2^0\, dx_2^0 + \ldots + X_n^0\, dx_n^0) N.$$

Deuxième cas : *Le déterminant* $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *est nul.* — C'est le cas où n est impair : le problème de Pfaff n'est plus possible, mais on peut dans ce cas résoudre un autre problème qui peut avoir son utilité, ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant. Intégrons, en effet, les équations (8) en prenant $h = 0$; ces équations se réduisent à $n - 1$, distinctes en général, et l'on peut prendre les constantes d'intégration égales à $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Supposer h nul, c'est supposer N indépendant de y_1; les équations (9), que l'on déduit de (8), se réduisent alors à

$$0 = 0, \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} = 0.$$

On peut poser

$$Y_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \qquad Y_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + Z_i;$$

les formules précédentes deviendront alors

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial Z_n}{\partial y_1} = 0,$$

et les fonctions $Z_2, \ldots, Z_n$ seront indépendantes de y_1; dU prendra alors la forme

$$dU = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + Z_2 dy_2 + \ldots + Z_n dy_n$$

ou

$$(10) \qquad dU = d\psi + Z_2 dy_2 + \ldots + Z_n dy_n,$$

$Z_2, Z_3, \ldots$ ne contenant pas y_1. Si toutefois la fonction ψ ne contenait pas y_1, on aurait seulement

$$(11) \qquad dU = Z'_2 dy_2 + \ldots + Z'_n dy_n$$

$Z'_2, \ldots, Z'_n$ ne contenant toujours pas y_1.

Troisième cas : *Le déterminant* $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux d'un certain ordre.* — On peut toujours prendre $h = 0$, mais les équations (8) sont en nombre inférieur à $n - 1$; on pourra prendre toutes les constantes d'intégration distinctes égales à des y; les autres y seront choisis arbitrairement, et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que dU affectera encore l'une des formes (10) ou (11).

XIV. — Application du problème de Pfaff à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

De ce qui vient d'être établi aux paragraphes précédents, il résulte que *l'expression différentielle*

$$(A) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n$$

est réductible à l'une des trois formes

$$(a) \qquad y_1(Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n),$$

$$(b) \qquad Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

$$(c) \qquad dy_1 + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n;$$

ces formes sont susceptibles d'une réduction ultérieure; les formes (a), (b) contiennent une différentielle de moins que la forme primitive. Je dis que l'on peut aussi faire disparaître une différentielle de la forme (c) : en effet, la forme

$$Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n$$

est réductible à un des trois types

$$(d) \qquad z_2(Z_3\,dz_3 + \ldots + Z_n\,dz_n),$$

$$(e) \qquad Z_3\,dz_3 + \ldots + Z_n\,dz_n,$$

$$(f) \qquad dz_2 + Z_3\,dz_3 + \ldots + Z_n\,dz_n.$$

Si dans (c) on remplace $Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n$ par l'expression (d) ou (e), il est clair que l'on fait disparaître une différentielle; si on la remplace par l'expression (f) en posant $dz_2 + dy_1 = du$, nous voyons que l'on fait encore disparaître une différentielle. En opérant sur les formes réduites, comme sur (A), il est clair que l'on peut encore faire disparaître une différentielle, et ainsi de suite.

Considérons maintenant l'équation aux différentielles totales obtenues en annulant l'expression (A)

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0;$$

on pourra faire successivement disparaître de cette équation p variables et la ramener à la forme

$$Y_{p+1}\,dy_{p+1} + Y_{p+2}\,dy_{p+2} + \ldots + Y_p\,dy_n = 0,$$

et l'on y satisfera en supposant $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n$ égales à des constantes; de là, comme on voit, plusieurs moyens de satisfaire à une équation aux différentielles totales, en se plaçant à un point de vue différent de celui où nous nous

sommes placés jusqu'ici, puisque cette fois nous admettons que l'on a le droit de considérer plusieurs variables comme fonctions des autres.

J'arrive maintenant à la conclusion de toute cette théorie qui est l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, t, p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{12}$$

dans laquelle u désigne la fonction inconnue des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n, t$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots,$ $\frac{\partial u}{\partial x_n}$. Cette équation sera intégrée si l'on trouve des quantités $u_1, p_1, \ldots, p_n$, satisfaisant à l'équation aux différentielles totales

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n + f\,dt - du + 0\,dp_1 + \ldots + 0\,dp_n = 0. \tag{13}$$

Faisons disparaître une différentielle du premier membre de (13) en appliquant les principes exposés aux paragraphes précédents; les équations (8) se réduisent dans le cas actuel à

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} & -dt\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + dp_1 + hp_1\,dy_1 = 0, \\ & -dt\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + dp_2 + hp_2\,dy_1 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & -dx_1 - \frac{\partial f}{\partial p_1}\,dt = 0, \\ & -dx_2 - \frac{\partial f}{\partial p_2}\,dt = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{\partial f}{\partial u}\,dt - h\,dy_1 = 0, \\ & \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial p_1}\,dp_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\,du + hf\,dy_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on intègre ce système de telle sorte que pour $t = t^0$, on

ait $x_1 = x_1^0, \ldots, p_1 = p_1^0, u = u^0$, l'équation (13) deviendra, en vertu de la remarque faite p. 140,

$$p_1^0\, dx_1^0 + \ldots + p_n^0\, dx_n^0 = du^0,$$

à laquelle on satisfera en prenant $u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, ϖ désignant une fonction arbitraire, et $p_i^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_i^0}\cdot$ Alors pour intégrer l'équation (12), il faudra donc éliminer $h\,dy_1$ des équations (14), intégrer les équations résultantes en prenant $x_1^0, \ldots, p_1^0, \ldots, u^0$ pour constantes d'intégration et remplacer ces constantes par leurs valeurs dans

$$u^0 = \varpi(x_1^0, \ldots, x_n^0), \qquad p_1^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0}, \qquad \ldots.$$

Cette méthode, comme on peut s'en convaincre, est identique avec celle de Cauchy. Pfaff n'avait pas pensé à prendre $x_1^0, \ldots, p_1^0, \ldots, u^0$ pour constantes d'intégration; aussi ses calculs étaient-ils beaucoup plus compliqués, et il était obligé d'appliquer plusieurs fois sa méthode pour faire disparaître successivement toutes les variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le perfectionnement à la méthode de Pfaff, que nous venons d'exposer, est dû à M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1882).

Pfaff a exposé sa méthode dans un Mémoire intitulé : *Methodus generalis æquationes differentiarum partiarum, nec non æquationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis inter quotcumque variabiles complete integrandi* (Acad. de Berlin 1814).

Gauss (*Œuvres complètes*) et Jacobi (*Crelle*, t. 2, et *Journal de Liouville*, t. III, 1re série) ont successivement essayé de perfectionner la méthode de Pfaff.

M. Cayley a indiqué un moyen simple pour résoudre les équations (8) par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots$ (*Journal de Crelle*, t. 57); cette méthode de Cayley est exposée et développée dans le Traité de Baltzer sur les déterminants (traduit par Hoüel).

XV. — Méthode de Jacobi.

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) = h, \tag{1}$$

dans laquelle $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignent les dérivées de la fonction inconnue u par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons que u n'entre pas dans f; quant à h, ce sera une constante arbitraire.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendant intégrable l'équation

$$du = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$$

et satisfaisant à (1), ce qui permettra de calculer u.

Nous supposerons le problème résolu : alors on devra avoir

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}, \tag{2}$$

et l'on pourra supposer que les fonctions p soient données par des équations renfermant des constantes arbitraires au nombre de n, y compris l'équation (1). Si l'on suppose ces équations résolues par rapport à ces constantes, que nous appellerons $h, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, on pourra les présenter sous les formes suivantes; nous y adjoignons (1) :

$$f = h, \quad f_1 = h_1, \quad f_2 = h_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = h_{n-1}. \tag{3}$$

Or, pour que les relations (2) aient lieu, il faut et il suffit, comme on sait, que l'on ait identiquement (p. 90)

$$\left\{\begin{array}{llll} (f, f_1) = 0, & (f, f_2) = 0, & \ldots. & (f, f_{n-1}) = 0, \\ & (f_1, f_2) = 0, & \ldots, & (f_1, f_{n-1}) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ & & & (f_{n-2}, f_{n-1}) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

La question est donc ramenée à satisfaire à ces équations simultanées aux dérivées partielles, et il semble que l'on ait

compliqué la question. Mais les équations (4) sont linéaires et d'une forme qui les rend éminemment propres à l'intégration, comme nous allons le voir.

Si h n'est pas arbitraire, il faudra remplacer dans (4), pour qu'elles soient identiques, l'un des p par sa valeur tirée de (1).

Si l'équation proposée ne renferme que deux variables, le système (4) se réduit à la seule équation $(f, f_1) = 0$ ou

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.$$

Pour l'intégrer, on écrira les équations

$$(a) \qquad \frac{dp_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)} = \frac{dp_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} = -\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = -\frac{dx_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)},$$

et il suffira d'en connaître *une seule* intégrale pour résoudre la question; en combinant cette intégrale avec l'équation proposée, on en déduira p_1 et p_2; en intégrant $p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2$, on aura immédiatement une intégrale complète de l'équation proposée. Les équations (a) sont les équations canoniques, ou elles deviennent de telles équations en égalant la suite des rapports (a) à dx. L'intégration de l'équation $f = 0$ est donc plus simple que celle des équations canoniques correspondantes, puisqu'il suffit de connaître *une* intégrale de ces équations distinctes de $f = h$ pour résoudre cette équation (c'est du reste ce que fournit le *théorème de Liouville*).

Le cas où l'équation $f = h$ dépend de deux variables est donc résolu : passons au cas général.

Commençons par calculer la fonction f_1; il faudra pour cela résoudre l'équation aux dérivées partielles $(f, f_1) = 0$ ou

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) = 0$$

ou les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dp_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)} = \frac{dp_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} = \ldots = -\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = -\frac{dx_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)} = \ldots$$

ou, ce qui revient au même, en introduisant une variable auxiliaire x, les équations canoniques

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Une intégrale *quelconque* de ces équations canoniques ne contenant pas x et renfermant une constante arbitraire h_1 fournira une équation $f_1 = h_1$ qui sera l'une de nos équations (3), ou, si l'on veut, la valeur de la constante h_1 tirée de l'intégrale en question des équations (5) fera connaître une fonction f_1 satisfaisant à l'équation $(f, f_1) = 0$.

La fonction f_2 doit satisfaire aux deux équations

$$(6) \qquad (f, f_2) = 0, \qquad (f_1, f_2) = 0.$$

Si l'on connaît une seconde solution φ des équations (5), elle donnera $(f, \varphi) = 0$, et, si elle donnait $(f_1, \varphi) = 0$, on pourrait prendre $f_2 = \varphi$. Dans ce cas, on aurait satisfait aux équations (6), et, dans le cas particulier où f ne dépendrait que de trois variables, l'équation $f = h$ serait intégrée par les équations $f = h$, $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$. Le théorème de Liouville permettrait d'ailleurs d'achever dans ce cas l'intégration des équations canoniques.

Mais, en général, on n'aura pas $(f_1, \varphi) = 0$, mais bien

$$(f_1, \varphi) = \varphi_1, \qquad (f_1, \varphi_1) = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad (f_1, \varphi_{k-1}) = \varphi_k,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ désignant de nouvelles intégrales et φ_k une constante ou une fonction des intégrales déjà obtenues; on peut alors chercher parmi les fonctions de $f, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ une expression f_2 qui satisfasse à $(f_1, f_2) = 0$. On a, en effet,

$$(f_1, f_2) = \sum \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} + \ldots\right) - \ldots\right]$$

ou

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) = (f_1, f)\frac{\partial f_2}{\partial f} &+ (f_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial f_1} \\ &+ (f_1, \varphi)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \ldots + (f_1, \varphi_{k-1})\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{k-1}}\end{aligned}$$

ou

$$(f_1, f_2) = (f_1, \varphi)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (f_1, \varphi_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + (f_1, \varphi_{k-1})\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{k-1}}$$

ou enfin

$$(f_1, f_2) = \varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + \varphi_k \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{k-1}}.$$

En égalant (f_1, f_2) à zéro, on peut calculer f_2 en fonction de $f, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$, au moyen de l'équation aux dérivées partielles

$$(7) \qquad \varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \ldots + \varphi_k \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{k-1}} = 0.$$

Si l'on peut intégrer cette équation, on aura satisfait aux équations (6) et, je le répète, si la fonction f ne dépend que de trois variables, le problème sera résolu.

Cette méthode, à la vérité, tomberait en défaut si φ_1 était une constante K, parce que l'équation (7) se réduirait à

$$K \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0$$

et ne permettrait pas de calculer f_2 en fonction de φ; pour continuer l'intégration, il faudra, ou bien remplacer φ par une autre intégrale, ou bien, si l'on connaît une autre intégrale φ' donnant aussi $(f_1, \varphi') = \text{const.} = K'$, les combiner ensemble, et l'on aura

$$\left(f, \frac{\varphi}{K} - \frac{\varphi'}{K'}\right) = 0, \qquad \left(f_1, \frac{\varphi}{K} - \frac{\varphi'}{K'}\right) = 0.$$

On pourra donc prendre $f_2 = \frac{\varphi}{K} - \frac{\varphi'}{K'}$ et même

$$f_2 = \theta\left(\frac{\varphi}{K} - \frac{\varphi'}{K'}\right).$$

Si la fonction f dépend de plus de trois variables, il faudra encore satisfaire aux équations

$$(f, f_3) = 0, \qquad (f_1, f_3) = 0, \qquad (f_2, f_3) = 0.$$

Pour cela, on choisira une intégrale des équations canoniques satisfaisant aux deux premières, ce que l'on est censé avoir fait; en appelant ψ cette intégrale, on posera $\psi_1 = (\psi, f_3)$, $(\psi, \psi_1) = \psi_2, \ldots$, puis on cherchera, comme tout à l'heure, une fonction de $\psi_1, \psi_2, \ldots$ satisfaisant à $(f_2, f_3) = 0$, et ainsi de suite.

Il est bon d'observer que l'équation (7) s'intègre en posant

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \ldots = \frac{d\varphi_{k-1}}{\varphi_k} = dt$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1, \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\varphi_{k-1}}{dt} = \varphi_k$$

ou encore

$$\frac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}} = \varphi_k(h, h_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}),$$

formule où l'on a remplacé f et f_1 (qui n'interviennent pas par leurs différentielles) par les constantes h et h_1.

XVI. — Application.

1° Proposons-nous d'intégrer l'équation

(1) $$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = h;$$

on posera les équations

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \frac{dx_3}{p_3} = -\frac{dp_1}{x_1} = -\frac{dp_2}{x_2} = -\frac{dp_3}{x_3},$$

d'où l'on tire les trois intégrales

$$p_1^2 + x_1^2 = a_1, \qquad p_2^2 + x_2^2 = a_2, \qquad p_3^2 + x_3^2 = a_3,$$

a_1, a_2, a_3 désignant des constantes. L'équation (1) et l'équation $p_1^2 + x_1^2 = a_1$ serviront déjà à calculer p_1, p_2, p_3; il nous faut une troisième équation; pour cela, prenant $p_2^2 + x_2^2 = a_2$,

nous observons que $(a_1, a_2)=0$; il en résulte que l'on peut poser

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2=h-(x_1^2+x_2^2+x_3^2),$$
$$p_1^2=a_1-x_1^2,$$
$$p_2^2=a_2-x_2^2.$$

Ces équations font connaître p_1, p_2, p_3 et, par suite, sont les intégrales du problème.

XVII. — Perfectionnements de la méthode de Jacobi.

Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik,* a présenté sa méthode sous une forme plus simple que dans les paragraphes précédents. Supposons l'équation proposée $f=h$ résolue par rapport à p_1 et mise sous la forme

$$(1) \qquad p_1-\varphi_{11}(x_1, \ldots, h, p_2, \ldots)=0,$$

l'équation $f_1=h_1$ sera déterminée par l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad (p_1-\varphi_{11}, f_1)=0.$$

La fonction f_1 une fois calculée, on pourra mettre $f_1=h_1$ sous la forme

$$(3) \qquad p_2-\varphi_{22}(x_1, \ldots, h, p_1, \ldots)=0,$$

et, en remplaçant p_2 par cette valeur dans (1), cette équation prendra la forme

$$(4) \qquad p_1-\varphi_{12}(x_1, \ldots, h, h_1, p_3, \ldots)=0$$

et ne contiendra plus p_2; on aura d'ailleurs

$$(p_1-\varphi_{12}, \quad p_2-\varphi_{22})=0,$$

puisque le système (3), (4), identique à $f=h$, $f_1=h_1$, est intégrable. On déterminera ensuite f_2 par les équations

$$(p_1-\varphi_{12}, f_2)=0, \qquad (p_2-\varphi_{22}, f_2)=0;$$

par la méthode exposée plus haut, f_2 une fois connu, on

résoudra $f_2 = h_2$ par rapport à p_3 et l'on portera la valeur de p_3 trouvée dans (3) et (4), et ainsi de suite. Les systèmes ordinaires que l'on sera ainsi conduit à intégrer seront de plus en plus simples.

XVIII. — Règle à suivre pour intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Soit

(1) $$f = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de la fonction inconnue u. Si la méthode de Cauchy lui est applicable, il faut la préférer à toute autre comme étant la plus expéditive ; mais il peut arriver que le système d'équations à intégrer dans l'application de cette méthode présente des difficultés rebutant le calculateur. Voici alors ce qu'il convient de faire.

Je suppose que, par un moyen quelconque, on soit parvenu à se procurer des intégrales de l'équation (1), c'est-à-dire des équations

(2) $$f_1 = h_1, \quad \ldots, \quad f_k = h_k$$

renfermant des constantes arbitraires et concourant avec (1) à former un système faisant connaître une partie des dérivées p : on peut chercher à compléter le système (1), (2), de manière à connaître tous les p, comme on l'a fait par la méthode de Jacobi, et voici comment il faudra procéder. Observons que le système (1), (2) doit être complètement intégrable, c'est-à-dire que l'on doit avoir

(3) $$(f_\mu, f_\nu) = 0,$$

et cela même identiquement dès que l'on aura remplacé une seule des quantités p par sa valeur tirée de (1), puisque h_1, h_2, ... sont des constantes arbitraires; si nous voulons trouver une nouvelle équation $f_{k+1} = h_{k+1}$ à adjoindre au

système (1), (2), il faudra qu'elle satisfasse aux formules analogues à (3)

$$(4)\quad (f, f_{k+1}) = 0, \qquad (f_1, f_{k+1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad (f_k, f_{k+1}) = 0,$$

et ce sera suffisant pour obtenir un nouveau système complètement intégrable. Ces équations (4) sont linéaires et homogènes : elles peuvent être remplacées par un système d'équations aux différentielles totales, et ce système lui-même par un système d'équations ordinaires E, mais beaucoup plus simple que le système primitif de Cauchy, vu qu'il contient moins de variables ; il suffira d'ailleurs de connaître *une* intégrale du système (4) ou des équations aux différentielles totales équivalentes.

On pourra ainsi adjoindre au système (1), (2) une série d'équations de même forme et obtenir assez d'équations pour calculer les p. J'ajoute que, si l'on pouvait intégrer complètement le système formé de (1), (2) et $f_{k+1} = h_{k+1}$, on aurait immédiatement la solution complète cherchée.

Enfin, je dis que l'on peut diriger les calculs de telle sorte que les équations E, que nous n'avons pas écrites, soient canoniques, ce qui peut faciliter encore les calculs à cause des propriétés remarquables de ce genre d'équations. Résolvons, en effet, les équations (1), (2) par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ et mettons-les sous la forme

$$(5)\quad p_1 - \varphi_1 = 0, \qquad p_2 - \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_{k+1} - \varphi_{k+1} = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ne contenant plus $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$; représentons f_{k+1} par F ; les équations (4) deviendront

$$(p_1 - \varphi_1, \mathrm{F}) = 0, \qquad (p_2 - \varphi_2, \mathrm{F}) = 0, \qquad \ldots$$

ou bien, en supposant que de F on ait éliminé $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$, à l'aide de (5) ;

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_{k+2}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+2}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{k+2}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{k+2}} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_{k+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+2}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{k+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_{k+2}} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce système fournit les équations aux différentielles totales

$$-dx_{k+2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{k+2}} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_{k+2}} dx_2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$dp_{k+2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+2}} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+2}} dx_2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les équations E, dont nous parlions tout à l'heure, sont

$$\frac{dx_{k+2}}{dx_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{k+2}}, \qquad \frac{dp_{k+2}}{dx_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations sont bien de la forme canonique : tel est le perfectionnement considérable apporté par M. Mayer à la méthode de Jacobi.

XIX. — Sur certaines conditions d'intégrabilité.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions de $u, p_1, p_2, \ldots, p_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $h_1, h_2, \ldots, h_n$ des constantes déterminées ou arbitraires. Proposons-nous de trouver les conditions que doivent remplir les fonctions f pour que, des équations

$$(1) \qquad f_1 = h_1, \qquad f_2 = h_2, \qquad \ldots, \qquad f_n = h_n,$$

on tire, pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$, des valeurs fonctions de u, $x_1, \ldots, x_n$, telles que l'équation aux différentielles totales

$$(2) \qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit complètement intégrable (nous avons résolu p. 90 cette question dans le cas où les f ne contiennent pas u).

L'équation (2) sera complètement intégrable si l'on a

$$(3) \qquad \frac{dp_i}{dx_j} = \frac{dp_j}{dx_i}$$

ou

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_i}{\partial u} p_j = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_i,$$

en désignant, pour abréger, par la notation $\frac{dp_j}{dx_i}$ la quantité

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_i.$$

Différentions l'équation $f_\mu = h_\mu$, par rapport à x_i; nous aurons

$$(4) \qquad \frac{df_\mu}{dx_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_i} + \ldots + \frac{\partial f_\mu}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_i} = 0;$$

en représentant $\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}$ par $\frac{df}{dx_i}$, on aura de même

$$(5) \qquad \frac{df_\nu}{dx_i} + \frac{\partial f_\nu}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_i} + \ldots + \frac{\partial f_\nu}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_i} = 0.$$

Multiplions (4) par $\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i}$ et (5) par $-\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}$ et ajoutons-les; faisons dans le résultat obtenu $i = 1, 2, \ldots, n$ et ajoutons toutes les équations ainsi formées : on aura, en vertu de (3),

$$\sum \left(\frac{df_\mu}{dx_i}\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{df_\nu}{dx_i}\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i} \right) = 0,$$

résultat que nous écrirons encore, pour abréger,

$$(6) \qquad (f_\mu, f_\nu) = 0;$$

telles sont les conditions au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ auxquelles doivent satisfaire les fonctions f pour que l'équation (2) soit complètement intégrable.

Réciproquement, je dis que, si les équations (6) ont lieu, l'équation (2) sera complètement intégrable. En effet, si l'on pose

$$\frac{dp_i}{dx_j} - \frac{dp_j}{dx_i} = p_{ij}$$

et si l'on ajoute les équations (4) et (5) multipliées par $\frac{\partial f_\nu}{\partial p_i}$, $-\frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}$, puis qu'on somme les résultats par rapport à i, on

trouve

$$(7) \qquad (f_\mu, f_\nu) + \sum \frac{\partial f_\mu}{\partial p_j} \frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} p_{ji} = 0,$$

en écrivant $\frac{\partial f_\mu}{\partial p_j} \frac{\partial f_\nu}{\partial p_i}$, au lieu de $\frac{\partial f_\mu}{\partial p_j} \frac{\partial f_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial f_\nu}{\partial p_j} \frac{\partial f_\mu}{\partial p_i}$, à cause de la relation $p_{ij} = -p_{ji}$ et $p_{ii} = 0$.

Posons

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = a_{ij}, \qquad R = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn};$$

(7) pourra s'écrire

$$(f_\mu, f_\nu) + \sum_{i,j} a_{\mu j} a_{\nu j} p_{ij} = 0.$$

Multiplions par $\frac{\partial R}{\partial a_{\mu r}} \frac{\partial R}{\partial a_{\nu s}}$, et sommons en faisant varier μ et ν de 1 à n : nous aurons, en vertu des relations connues entre les mineurs d'un déterminant et ses éléments,

$$\sum (f_\mu, f_\nu) \frac{\partial R}{\partial a_{\mu r}} \frac{\partial R}{\partial a_{\nu s}} + R^2 p_{ij} = 0.$$

Or R, déterminant fonctionnel des f, n'est pas nul, sans quoi les équations (1) seraient incompatibles ou indéterminées; donc on a bien $p_{ij} = 0$, ou les relations (3), si les équations $(f_\mu, f_\nu) = 0$ ont lieu.

Remarque I. — Les constantes $h_1, h_2, \ldots, h_n$ peuvent être ou déterminées ou arbitraires; si les constantes en question ont des valeurs bien déterminées; si elles sont nulles, par exemple, les formules $(f_\mu, f_\nu) = 0$, qui ont lieu pour les valeurs des p satisfaisant à (1), sont par suite des conséquences de (1).

Au contraire, si $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des constantes arbitraires, les formules $(f_\mu, f_\nu) = 0$ sont des identités; car, ayant lieu quels que soient les h, elles ont lieu aussi quels que soient les p.

Remarque II. — Les équations $(f_\mu, f_\nu) = 0$ ne sont pas toutes nécessaires pour que l'équation (2) soit intégrable, en ce sens qu'elles sont satisfaites forcément quand d'autres conditions plus simples le sont : c'est ce que nous allons établir.

On a identiquement

$$(f_\lambda, f_{\mu\nu}) + (f_\mu, f_{\nu\lambda}) + (f_\nu, f_{\lambda\mu}) = 0,$$

quand on pose

$$(f_\mu, f_\nu) = f_{\mu\nu}.$$

Ce théorème, qui est la généralisation de celui de Donkin, se démontre de la même manière, en remplaçant les expressions symboliques par leurs développements. Supposons alors que l'on ait

$$(8) \qquad f_{12} = 0, \qquad f_{13} = 0, \qquad \ldots, \qquad f_{1n} = 0;$$

on aura

$$(f_1, f_{23}) + (f_2, f_{13}) + (f_3, f_{21}) = 0$$

et, en vertu de (8),

$$(f_1, f_{23}) = 0;$$

f_{23} est donc une solution de l'équation aux dérivées partielles, linéaire, homogène,

$$(f_1, V) = 0,$$

où V est la fonction inconnue. Si l'on assujettit V à rester constant pour $x_1 = x_1^0$, V sera constant, quel que soit x_1 ; donc, si f_{23} est nul pour $x_1 = x_1^0$, il sera nul quels que soient x_1, x_2, ..., x_n. Ainsi, si les relations (8) ont lieu quels que soient x_1, x_2, ..., x_n et si l'on a pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient x_2, x_3, ..., x_n,

$$(9) \qquad f_{23} = 0, \qquad f_{24} = 0, \qquad \ldots, \qquad f_{2n} = 0,$$

ces relations (9) auront encore lieu quels que soient x_1, x_2, ..., x_n, ...

On peut donc dire que, pour que l'équation (2) soit intégrable, il suffit que

$f_{12}=0$, $f_{13}=0$, ..., $f_{1n}=0$ quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$f_{23}=0$, $f_{24}=0$, ..., $f_{2n}=0$ $\left\{\begin{array}{l}\text{pour } x_1=x_1^0,\\ \text{quels que soient } x_2, x_3, \ldots, x_n;\end{array}\right.$

$f_{34}=0$, ..., $f_{3n}=0$ $\left\{\begin{array}{l}\text{pour } x_1=x_1^0, \quad x_2=x_2^0,\\ \text{quels que soient } x_3, x_4, \ldots, x_n,\end{array}\right.$

....,

$f_{n-1,n}=0$ pour $x_1=x_1^0$, ..., $x_{n-1}=x_{n-1}^0$ quel que soit x_n.

XX. — Nouvel exposé de la méthode de Jacobi.

Proposons-nous d'intégrer l'équation

(1) $$f=0.$$

On pourra trouver une intégrale en déterminant des fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}$, telles que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tirées de (1) et (2),

(2) $$f_1=0, \quad f_2=0, \quad \ldots, \quad f_{n-1}=0,$$

rendent
$$du = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$$
intégrable; or $f_2, f_3, \ldots$ doivent pour cela satisfaire aux équations

(3) $$(f, f_1)=0, \quad (f, f_2)=0, \quad \ldots, \quad (f, f_{n-1})=0;$$

et, pour $x_1=x_1^0$, à

(4) $$\left\{\begin{array}{l}(f_1, f_2)=0, \quad \ldots, \quad (f_1, f_{n-1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Nous allons diriger les calculs de manière à retrouver la méthode de Cauchy : à cet effet, nous intégrerons les équations (3) de manière que, pour $x_1=x_1^0$, $\sum p\,dx$ soit une différentielle exacte; les équations (3) et les suivantes seront alors satisfaites.

Les fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sont des intégrales de $(f, V) = 0$, que l'on peut écrire

$$(3\ bis) \quad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial V}{\partial p_\mu} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{}{\partial p_\mu}\right] = 0$$

ou des équations ordinaires

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial u}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial u}} = \ldots = \frac{-dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} \\ &\qquad = \frac{-dx_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)} = \ldots = \frac{-du}{p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, au nombre de $2n$, se réduisent à $2n - 1$, en vertu de (1) (p. 99), et comprennent implicitement la relation

$$du = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

Intégrons-les de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, on ait

$$x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \ldots, \quad p_n = p_n^0, \quad u = u^0;$$

on pourra alors appeler p_1^0 la valeur de p_1 tirée de (1) pour $x_1 = x_1^0$. Toute combinaison de ces intégrales, par exemple le résultat de l'élimination des x^0, fournira encore des intégrales de (3), et cela lors même que l'on aura établi des relations entre les p^0 et les x^0. Posons alors

$$u^0 = \varpi(x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

$$p_2^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0}, \quad \ldots, \quad p_n^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n^0}.$$

Si entre ces équations et les intégrales de (5) on élimine les p^0, les x^0 et les u^0, les équations résultantes donneront $u, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et : 1° en vertu du théorème page 19, on aura pour u une fonction qui, pour $x_1 = x_1^0$, se réduira à $\varpi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ et, pour $p_1, p_2, \ldots$, des fonctions

qui se réduiront aux dérivées de ϖ; 2° les p et les u seront déterminés de manière à satisfaire à (1) et à rendre

$$\sum p\,dx = du.$$

On retrouve ainsi la méthode de Cauchy.

XXI. — Intégration de deux équations linéaires.

Liouville a découvert un théorème qui se déduit bien facilement de ce qui précède, et qui peut d'ailleurs se démontrer directement; ce théorème, utilisé par Bour et par Jacobi, peut servir à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Soient

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., f désignant des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n; A et B des symboles opératoires définis par les équations précédentes; considérons les équations aux dérivées partielles linéaires

$$A(f) = 0, \tag{1}$$

$$B(f) = 0. \tag{2}$$

La condition d'intégrabilité de ces équations est

$$\sum \left[\frac{\partial A(f)}{\partial x_i} \frac{\partial B(f)}{\partial p_i} - \frac{\partial A(f)}{\partial p_i} \frac{\partial B(f)}{\partial x_i} \right] = 0,$$

p_i désignant, pour abréger, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En effectuant les calculs, on trouve

$$\sum \left[B_i \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_i} p_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_i} p_2 + \ldots \right) - A_i \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_i} p_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_i} p_2 + \ldots \right) \right] = 0. \tag{3}$$

Si l'on tire p_1 et p_2, par exemple, de (1) et (2) pour les porter dans cette équation, elle devra être identique; mais il

est clair que, si cette équation (3) est identique, c'est-à-dire que si l'on a identiquement

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum\left(B_i \dfrac{\partial A_1}{\partial x_i} - A_i \dfrac{\partial B_1}{\partial x_i}\right) = 0, \\ \sum\left(B_i \dfrac{\partial A_2}{\partial x_i} - A_i \dfrac{\partial B_2}{\partial x_i}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les équations $A(f) = 0$, $B(f) = 0$ auront une solution commune, et il en sera de même de $A(f) =$ const., $B(f) =$ const.

Il est facile de voir que, quand les relations (4) sont satisfaites, et c'est en cela que consiste le théorème de Liouville, on a

$$AB(f) = BA(f).$$

En effet,

$$\begin{aligned} AB(f) = \quad & A_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\right) \\ & + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}$$

ou

$$AB(f) = \sum A_i B_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

on a de même

$$BA(f) = \sum B_i A_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

donc, en vertu de (4),

$$BA(f) - AB(f) = 0$$

ou

$$AB(f) = BA(f);$$

réciproquement, cette relation entraîne

$$\sum p_j \left(B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) = 0,$$

quels que soient p_1, p_2, ... ou les relations (4). Les formules (1) et (2) ont alors une solution commune.

Voici maintenant l'usage que l'on peut faire de ce théorème.

Supposons que l'on connaisse une solution de $A(f)=0$, et soit f_1 cette solution; comme $A(f_1)=0$, on aura aussi $BA(f_1)=0$ ou $AB(f_1)=0$; donc :

1° Ou $B(f_1)$ est une nouvelle solution de $A(f)=0$;

2° Ou $B(f_1)$ est une constante égale à 0, et alors f_1 est aussi une solution de $B(f)=0$;

3° Ou bien $B(f_1)$ est une fonction de f_1, ou une constante différente de zéro.

Les deux premières hypothèses conduisent à des résultats dont l'utilité est incontestable. Plaçons-nous dans la première hypothèse, et soit $B(f_1)=f_2$; alors $B(f_2)$ ou $AB^2(f_1)=0$; donc :

1° Ou $B^2(f_1)$ est une nouvelle solution de $A(f)=0$;

2° Ou bien $B^2(f_1)=0$, et alors Bf_1 ou f_2 est une solution commune à (1) et (2);

3° On peut avoir $B^2(f_2)=F(f_1, f_2)$.

En supposant que la première hypothèse soit réalisée, $B^2(f_1)$ pourra être une nouvelle solution de $A(f)=0$, ou $B^2(f_1)$ est une solution commune à (1) et (2), etc.

Maintenant observons que la solution la plus générale de (1) est une fonction $F(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ de $n-1$ solutions particulières $f_1, \ldots, f_{n-1}$; donc, si l'on ne tombe pas sur une constante, $B^i(f_1)$ dans le cas le plus défavorable sera une fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_i$, ces quantités désignant des intégrales de (1). Prenons pour variables $f_1, f_2, \ldots, f_i$ et $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$; voyons ce que devient dans cette hypothèse l'équation $B(f)=0$. On a, en désignant par un d les dérivées prises par rapport aux nouvelles variables,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{df_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{df}{df_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}} = \frac{df}{dx_{i+1}} + \frac{df}{df_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} + \frac{df}{df_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$B(f) = 0 = B_{i+1}\frac{df}{dx_{i+1}} + B_{i+2}\frac{df}{dx_{i+2}} + \ldots + \frac{df}{df_1}B(f_1) + \frac{df}{df_2}B(f_2) + \ldots + \frac{df}{df_i}B(f_i).$$

Or la solution commune à $B(f)$ et $A(f) = 0$ peut être déterminée en supposant $\frac{df}{dx_{i+1}} = 0$, $\frac{df}{dx_{i+2}} = 0$, ..., et alors on a pour la déterminer l'équation $Bf = 0$, qui se réduit à

$$\frac{df}{df_1}B(f_1) + \ldots + \frac{df}{df_i}B(f_i) = 0$$

ou

$$f_2\frac{\partial f}{\partial f_1} + f_3\frac{\partial f}{\partial f_2} + \ldots + F(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1})\frac{\partial f}{\partial f_i} = 0.$$

Lorsque Bf_1 est une constante différente de zéro ou une fonction de f_1, cette méthode tombe en défaut, parce que l'équation précédente devient

$$\frac{\partial f}{\partial f_1} = 0;$$

mais alors, si l'on connaît une seconde solution f_2 de $Af = 0$, Jacobi a montré que l'on pouvait encore tirer parti de cette circonstance en cherchant une solution de $B(f) = 0$, fonction de f_1 et f_2 seuls; on a

$$\varpi_1(f_1)\frac{df}{df_1} + \varpi_2(f_2)\frac{df}{df_2} = 0,$$

en supposant $B(f_1) = \varpi_1(f_1)$ et $B(f_2) = \varpi_2(f_2)$.

L'équation précédente peut s'intégrer par les quadratures, en intégrant les équations

$$\frac{df_1}{\varpi_1(f_1)} = \frac{df_2}{\varpi_2(f_2)};$$

alors on a la solution commune à (1) et (2

$$f = \int\frac{df_1}{\varpi_1} - \int\frac{df_2}{\varpi_2}.$$

Remarque. — L'intégration d'une équation aux dérivées partielles

(1) $$A(f) = 0$$

est évidemment simplifiée quand on sait qu'elle a une solution commune avec une autre équation

(2) $$B(f) = 0;$$

or une équation, telle que (2), sera connue toutes les fois qu'en changeant x_1 en $x_1 + \varepsilon B_1$, x_2 en $x_2 + \varepsilon B_2$, ..., ε désignant un infiniment petit, la fonction

$$f + \varepsilon\left(B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = f + \varepsilon B(f),$$

dans laquelle se change f, satisfera encore à (1), parce que, alors, on aura

$$A[f + \varepsilon B(f)] = 0$$

et, par conséquent,

$$AB(f) = 0;$$

mais, $A(f)$ étant nul, on aura $BA(f) = 0$ et, par conséquent, $AB(f) = BA(f)$, et les équations (1) et (2) auront une solution commune.

La substitution $x_1 + \varepsilon B_1$, $x_2 + \varepsilon B_2$, ... est ce que l'on appelle une *substitution infinitésimale;* il suffit, comme l'on voit, d'en connaître une pour simplifier l'intégration de l'équation $A(f) = 0$.

XXII. — Transformation des équations aux dérivées partielles.

Soient v, α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_n des quantités liées entre elles par la relation

(1) $$dv = \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \ldots + \beta_n d\alpha_n,$$

qui exprime que $\beta_i = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}\cdot$ Proposons-nous de substituer aux

variables α, β, v d'autres variables u, x_1, $x_2, \ldots$, p_1, $p_2, \ldots$, telles que l'équation (1) se transforme en

$$(2)\qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

ou de telle sorte que l'on ait

$$(3)\quad (dv - \beta_1\,d\alpha_1 - \ldots - \beta_n\,d\alpha_n) = \mathrm{M}(du - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n),$$

M désignant un facteur quelconque. En effectuant le changement de variable, cette formule devient

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial u}\,du + \sum \dfrac{\partial v}{\partial x_i}\,dx_i + \sum \dfrac{\partial v}{\partial p_i}\,dp_i \\ \quad - \beta_1\left(\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u}\,du + \sum \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}\,dx_i + \sum \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\,dp_i\right) \\ \quad - \beta_2\left(\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u}\,du + \sum \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_i}\,dx_i + \sum \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial p_i}\,dp_i\right) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = \mathrm{M}\left(du - \sum p_i\,dx_i\right)$$

et, en identifiant,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial u} - \beta_1 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \ldots - \beta_n \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial u} = \mathrm{M}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_i} - \beta_1 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} - \ldots - \beta_n \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_i} = -\mathrm{M}p_i, \\ \dfrac{\partial v}{\partial p_i} - \beta_1 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} - \ldots - \beta_n \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_i} = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de M entre ces équations donne

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial v}{\partial u} - \beta_1\left(\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right) - \ldots - \beta_n\left(\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial u}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial p_i} - \beta_1 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} - \ldots - \beta_n \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_i} = 0; \end{array}\right.$$

l'élimination des quantités β donne

$$(6)\quad \frac{\partial(v, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial(x_i, p_1, p_2, \ldots, p_n)} + p_i \frac{\partial(v, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial(u, p_1, p_2, \ldots, p_n)} = 0;$$

si ces n équations sont satisfaites, il existera des quantités β satisfaisant aux équations (5) ou (4), et les équations (1) et (2) pourront être transformées l'une dans l'autre.

Ceci posé, supposons que

$$V = 0 \tag{7}$$

soit le résultat de l'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ entre les équations qui lient les x, p, u aux α, β, v; en différentiant cette équation, on a les formules suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p_i} + \sum \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} = 0.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{\partial V}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} : \frac{\partial(v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial(x_i, p_1, \ldots, p_n)}$$

et, en remplaçant x_i par u,

$$\frac{\partial V}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} : \frac{\partial(v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial(u, p_1, \ldots, p_n)};$$

en divisant ces formules membre à membre, on a

$$1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} : \frac{\partial V}{\partial u}\right)\left[\frac{\partial(v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial(x_i, p_1, \ldots, p_n)} : \frac{\partial(v, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial(u, p_1, p_2, \ldots, p_n)}\right],$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} : \frac{\partial V}{\partial u} = -p_i$$

ou enfin

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

et de même

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} + \beta_i\frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit V une fonction quelconque de u, x_1, x_2, ..., x_n; v, α_1, α_2, ..., α_n si l'on pose :*

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial V}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} + \beta_i\frac{\partial V}{\partial v} = 0, \tag{8}$$

ces formules permettront de calculer les quantités u, x_1, $x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ *en fonction de* v_1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; *et, si l'on a*

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

on aura aussi

$$\beta_i = \frac{\partial u}{\partial \alpha_i}.$$

On le vérifie aisément comme il suit : différentions $V = 0$, nous aurons

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V}{\partial u} \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial V}{\partial v} \sum \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0$$

ou, en vertu de (8),

$$\frac{\partial V}{\partial u} \sum \left(p_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_i + \frac{\partial V}{\partial v} \sum \left(\beta_i - \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}\right) d\alpha_i = 0;$$

il résulte de là que, si $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ quel que soit i, on aura $\beta_i = \dfrac{\partial v}{\partial \alpha_i}$ quel que soit i.

Cette théorie tomberait en défaut si les déterminants

$$(a) \qquad \frac{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$$

étaient nuls. Alors les formules de transformation ne contiendraient pas les p, elles ne contiendraient pas non plus les β. De là deux sortes de formules pour le changement de variables :

1° *Les transformations ponctuelles,* dans lesquelles on donne directement v, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en fonction de u, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ seuls;

2° *Les transformations de contact,* pour lesquelles, les déterminants (a) n'étant pas nuls, les quantités v, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont liées à u, $x_1, \ldots, x_n$ par des formules où entrent les p et les β.

XXIII. — Méthode d'intégration de M. Sophus Lie.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles simultanées

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t_1} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t_m} = f_m,$$

dans lequel $f_1, f_2, \ldots, f_m$ désignent des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_m$ et des dérivées p_1, $p_2, \ldots, p_n$, de la fonction inconnue u, par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$(2) \quad u = v + \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

et supposons que, $v, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant des constantes, u soit une intégrale de la première équation (1) en y supposant $t_2, t_3, \ldots, t_m$ constants. Prenons l'équation (2) pour former une transformation de contact; en d'autres termes (*voir* le paragraphe précédent), posons, outre l'équation (2), les suivantes

$$(3) \qquad p_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \qquad \beta_i = -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_i},$$

les équations (1) deviendront, en substituant les variables v, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ à $u, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$,

$$(4) \qquad \frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial \theta}{\partial t_1} = f'_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial t_2} + \frac{\partial \theta}{\partial t_2} = f'_2, \qquad \ldots,$$

$f'_1, f'_2, \ldots$ désignant des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1$, $\beta_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots, t_m$. Mais la première de ces équations doit être satisfaite en supposant v indépendant de t_1 et se réduire à $\frac{\partial v}{\partial t_1} = 0$. Pour que les équations (4) aient une solution commune, il faut alors que la variable t_1 ait disparu de ces équations. Si donc la variable t_1 entre encore explicitement dans les équations transformées, celles-ci n'ont pas de solution commune; si la variable t_1 a disparu, on est ramené

à intégrer le nouveau système (4) qui contient une variable t_1 de moins et une équation $\frac{\partial v}{\partial t_1} = 0$ dont on peut faire abstraction. Telle est en substance la méthode de M. Lie.

EXERCICES ET NOTES.

1. Étant donné un système d'équations ordinaires (que l'on peut toujours supposer du premier ordre), reconnaître s'il a des solutions communes avec un autre système, et, dans le cas où il en est ainsi, en profiter pour simplifier l'intégration de ce système.

2. Intégrer le système suivant qui admet une intégrale complète :

$$\begin{aligned} dx\,(y'z'' - z'y'') + dy\,(z'x'' - x'z'') + dz\,(x'y'' - y'z'') &= 0, \\ dx'\,(y''z - z''y) + dy'\,(z''x - x''z) + dz'\,(x''y - y''x) &= 0, \\ dx''(yz' - zy') + dy''(zx' - xz') + dz''(xy' - yx') &= 0. \end{aligned}$$

(On peut observer qu'en ajoutant ces équations on obtient une combinaison intégrable.)

3. Trouver la condition pour que l'équation

$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

où P_1, P_2, ... sont des fonctions de x_1, x_2, ..., admette une intégrale homogène, une intégrale complète homogène.

4. Intégrer le système

$$\begin{aligned} du &= (3u + 12v)\,dx + (2u + 12v)\,dy, \\ dv &= (u + 2v)\,dx + (u + v)\,dy. \end{aligned}$$

(Proposé au Concours de Licence, à la Faculté de Paris, novembre 1881.)

5. Intégrer

$$yz^3\,dx + xz^3\,dy + (x^2y^2 - xyz^2)\,dz = 0.$$

6. Intégrer

$$dx(y^2 - z^2 - 2xy + 2xz) + dy\,(z^2 - x^2 - 2yz + 2xy) + dz(x^2 - y^2 - 2zx + 2yz) = 0.$$

7. Étant données deux équations entre x, y, z et deux constantes arbitraires a, b,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x, y, z, a, b)=0\\ \psi(x, y, z, a, b)=0\end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\Phi(x, y, z)=a,\\ \Psi(x, y, z)=b,\end{array}\right.$$

on peut supposer que x, y, z soient les coordonnées d'un point; ces équations représentent alors un système de courbes; par chaque point de l'espace il passe une de ces courbes. On demande de trouver les conditions pour que ces courbes soient normales à une même surface, et de trouver cette surface quand elle existe.

8. Existe-t-il des surfaces dans lesquelles le plan tangent soit constamment normal au rayon vecteur issu d'un point fixe?

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

I. — Préliminaires.

Si, comme nous l'avons vu, la théorie des équations aux dérivées partielles à une inconnue est une des parties les mieux faites du Calcul intégral, la théorie des équations d'ordre supérieur est tout entière à édifier. On ne sait presque rien sur ces équations : le nombre de celles que l'on sait intégrer est fort restreint; encore n'en a-t-on, la plupart du temps, que des solutions imparfaites sous forme d'intégrales définies qui souvent n'ont pas de sens précis. Peut-être même ne connaîtra-t-on jamais la forme des solutions de ces équations.

Il est vrai que, comme nous allons le voir, Cauchy a mis hors de doute l'existence des solutions dans des circonstances déterminées : il a prouvé que les solutions, pour une valeur particulière d'une des variables, se réduisaient, ainsi que leurs premières dérivées, à des fonctions arbitraires; mais on ne voit pas s'il doit entrer forcément des fonctions arbitraires dans les solutions, bien que ces solutions *dépendent* de fonctions arbitraires; d'ailleurs, l'idée de fonctionnalité dans ces questions prend une acception vague qui rend leur étude très obscure; on nous pardonnera donc si nous nous départissons dans ce Chapitre de notre rigueur habituelle.

II. — Théorème de Cauchy.

Cauchy a démontré, pour la première fois, que tout système

d'équations aux dérivées partielles contenant autant d'inconnues que d'équations admettait une solution. (*Comptes rendus*, 2e semestre 1842, p. 85; 1er semestre 1843, p. 469 et 484.)

Occupons-nous d'abord des équations dans lesquelles les dérivées des fonctions inconnues n'entrent que sous la forme linéaire, et considérons un pareil système résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues prises par rapport à une même variable t. Nous allons prouver que :

$x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ désignant des variables indépendantes, $u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions de ces variables, K, K', ..., A_1, A'_1, ..., B_1, B'_1, ... représentant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, t, u, v, w, \ldots$, on peut trouver pour u, v, w, ... des fonctions satisfaisant aux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K + A_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + B_1 \dfrac{\partial v}{\partial x_1} + B_2 \dfrac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = K' + A'_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + A'_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + B'_1 \dfrac{\partial v}{\partial x_1} + B'_2 \dfrac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et se réduisant pour $t = t^0$ à des constantes données u^0, v^0, w^0, ...

Pour établir ce théorème, supposons d'abord que les fonctions u, v, w, ... satisfaisant aux conditions énoncées existent et soient développables par la formule de Taylor; on aura

$$(2)\quad u = u^0 + (t - t^0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 + \frac{(t - t^0)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 + \ldots, \qquad v = \ldots,$$

l'indice o placé en haut ou en bas d'une lettre ou d'une parenthèse indiquant que l'on doit y supposer $t = t^0$.

Les relations (2) étant supposées exactes, il en résulte que, u^0, v^0, ... étant des constantes, les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, ...

sont nulles pour $t = t^0$: alors les formules (1) donneront

$$(3)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = K_0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = K'_0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 = K''_0, \qquad \ldots,$$

K_0, K'_0, ... désignant les valeurs de K, K′, ... pour $t = t^0$.
Différentions les équations (1) : nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \ldots \\ &\quad + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \ldots\right) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

si alors on suppose $t = t^0$, il vient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)_0 K_0 \\ &\quad + \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right) K'_0 + \ldots + A_{10}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\right)_0 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Pour avoir les dérivées $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\right)_0$, ... on différentiera les équations (1) par rapport à x_1, x_2, ... et l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} &= \frac{\partial K}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial K}{\partial x_1}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t}\right) = \left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0, \qquad \ldots;$$

la formule (4) devient alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)_0 K_0 + \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right) K'_0 + \ldots \\ &\quad + A_{10}\left(\frac{\partial K}{\partial x_1}\right)_0 + A_{20}\left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0 + \ldots . \end{aligned}$$

Calculons $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_0$; il faudra encore différentier de nouveau les équations (1) par rapport à t et par rapport à x_1, x_2, ...

x_n, puis on fera $t = t^0$. On calculera ainsi successivement toutes les dérivées

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_0, \quad \ldots;$$

ces dérivées seront des sommes de termes de la forme

$$G_0\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\tau}}{\partial t^{\tau}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial v^{\gamma}} \cdots \mathrm{L}\right)_0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \tau, \beta, \gamma, \ldots$ désignant des nombres entiers et G et L deux des quantités

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{K}, & \mathrm{A}_1, & \mathrm{A}_2, & \ldots, & \mathrm{B}_1, & \mathrm{B}_2, & \ldots, \\
\mathrm{K}', & \mathrm{A}'_1, & \mathrm{A}'_2, & \ldots, & \mathrm{B}'_1, & \mathrm{B}'_2, & \ldots, \\
\mathrm{K}'', & \mathrm{A}''_1, & \mathrm{A}''_2, & \ldots, & \mathrm{B}''_1, & \mathrm{B}''_2, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Il est facile de calculer une limite supérieure des modules de toutes ces dérivées. En effet, on sait que l'on a (p. 5, t. IV)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta}}{\partial u^{\beta}} \cdots \frac{\partial^{\tau}}{\partial t^{\tau}} \mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, u, v, \ldots, t) \\
&\quad < \alpha_1! \ldots \beta!\gamma! \ldots \tau! \frac{\mathrm{A}}{x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots u'^{\beta} v'^{\gamma} \ldots t'^{\tau}},
\end{aligned}$$

$x'_1, x'_2, \ldots, u', v', \ldots, t'$ désignant des quantités positives telles que $x_1, x_2, \ldots, u, v, \ldots, t$ recevant des accroissements de modules moindres que ces quantités, L conserve un module tout au plus égal à A.

On pourra donc calculer une limite supérieure des modules des divers termes des séries (2), ce qui va nous permettre de prouver qu'elles sont convergentes.

Considérons d'abord le cas où l'on aurait

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \ldots = \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = \ldots = \mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 = \ldots \\
&= \mathrm{A}'_1 = \mathrm{A}'_2 = \ldots = \mathrm{B}'_1 = \mathrm{B}'_2 = \ldots = \mathrm{K}'_1 = \mathrm{K}'_2 = \ldots \\
&= \frac{\mathrm{A}}{x_1 x_2 \ldots uv \ldots t};
\end{aligned}$$

les équations (1) se réduisent à

$$(1\ bis)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \ldots = \frac{\Lambda\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \ldots\right)}{x_1 x_2 \ldots uv \ldots t}.$$

Il est facile de trouver une intégrale de ces équations, il suffit pour cela de prendre d'abord

$$\theta = u - u^0 = v - v^0 = \ldots,$$

et de déterminer θ au moyen de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$x_1 x_2 \ldots (u^0 + \theta)(v^0 + \theta) \ldots t\ \frac{\partial\theta}{\partial t} = \Lambda\left(1 + \mu\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \ldots\right),$$

où μ désigne le nombre des fonctions u, v, ... Pour intégrer cette équation, on commencera par intégrer les équations ordinaires

$$-d\theta = \frac{dx_1}{\mu} = \frac{dx_2}{\mu} = \ldots = -\frac{\Lambda\, dt}{x_1 x_2 \ldots (u^0 + \theta) \ldots t}.$$

L'une des intégrales est

$$(5)\qquad \log\frac{t}{t^0} = \frac{1}{\Lambda}\int_0^\theta (x_1^0 - \mu\theta)(x_2^0 - \mu\theta)\ldots(u^0 + \theta)\ldots d\theta;$$

c'est aussi une intégrale de l'équation aux dérivées partielles, intégrale qui s'évanouit pour $t = t^0$. Si nous désignons par $f(\theta)$ le second membre de cette équation (5), nous pourrons la mettre sous la forme

$$(6)\qquad t = t_0 e^{f(\theta)} \qquad \text{ou} \qquad t - t^0 = t^0(e^{f(\theta)} - 1);$$

de cette équation on déduira des valeurs de u, v, ... satisfaisant à (1 *bis*) et se réduisant à u^0, v^0, ..., pour $t = t^0$. Or, en vertu de la formule (6), θ est développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $t - t^0$; tant que cette variable $t - t^0$ restera comprise à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre ne contenant pas de racine multiple de l'équation (6), cette équation ne peut avoir de

racine multiple que si $f'(\theta) = 0$, c'est-à-dire que si θ est égal à l'une des quantités $\frac{x_1^0}{\mu}$, ..., $-u^0$, $-v^0$, ... Or, si l'on suppose t très voisin de t^0, $f(\theta)$ sera très voisin de zéro; si donc aucune des quantités $\frac{x_1^0}{\mu}$, ..., $-u^0$, $-v^0$, ... n'est nulle pour $t = t_1^0$, θ, pour des valeurs de t voisines de t^0, sera développable suivant les puissances entières de $t - t^0$, et cela à l'intérieur d'un cercle dont on pourrait, si l'on voulait, calculer le rayon.

Il en résulte que les solutions u_1, v_1, ... des équations (1 *bis*), qui se réduisent pour $t = t^0$ à u^0, v^0, ..., pourront se développer en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $t - t^0$. Ces développements pourront s'effectuer par la formule de Taylor, comme on l'a fait pour les solutions du système (1) supposées développables; mais chaque terme du développement de u_1, ou de v_1, ..., aura pour coefficient le module maximum du terme correspondant dans le développement de u, v, ..., supposé possible. Donc les séries (2) sont convergentes entre les limites des variables pour lesquelles A, B, ... ne prennent pas le module maximum A. Reste à prouver que les formules (2) résolvent bien les équations (1); c'est ce que l'on établira comme il suit :

Différentions (2), nous aurons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 + (t - t_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 + \ldots, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \ldots;$$

or $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$ n'est autre chose que le second membre de la première formule (1) où l'on a fait $t = t^0$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0$ n'est autre chose que sa dérivée relative à t dans laquelle on a fait $t = t^0$, ...; donc les seconds membres des formules précédentes sont les développements en série des seconds membres de (1) : ces équations sont donc satisfaites.

III. — Complément et discussion des théories précédentes.

Il est prouvé que, pour des valeurs de t voisines de t^0, les équations (1) admettent une solution u, v, ..., les fonctions u, v, ... se réduisant à des constantes u^0, v^0, ... pourvu que t^0, x_1^0, x_2^0, ..., u^0, ... ne soient pas nuls; mais il est facile de voir que ces conclusions subsistent encore si $t^0 = 0$, $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, ..., $u^0 = 0$, ...; il suffit pour cela de faire subir aux formules (1) un changement de variables consistant à augmenter u, v, ..., x_1, x_2, ..., t, ... de quantités constantes.

Maintenant nous allons prouver que l'on peut toujours intégrer les équations (1), de telle sorte que, pour $t = t^0$, u, v, ... se réduisent à des fonctions données de x_1, x_2, ..., x_n, à savoir φ, ψ, ...

Posons

$$u = \varphi + \mathrm{U} - u^0, \qquad v = \psi + \mathrm{V} - v^0, \qquad \ldots;$$

pour $t = t^0$, u, v, ... devant se réduire à φ, ψ, ..., U, V, ... se réduiront dans la même hypothèse aux constantes u^0, v^0, ...; quant aux équations (1) elles deviendront

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{A}_1 \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} + \ldots + \mathrm{B}_1 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{Y}_1 = \mathrm{K}_1 + \mathrm{A}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + \mathrm{B}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \ldots.$$

Et, pour résoudre la question, il faudra intégrer le système (A) de telle sorte que, pour $t = t^0$, U, V, ... se réduisent à u^0, v^0, ..., ce qui est possible.

Le théorème démontré précédemment tombera en défaut quand A sera infini ou indéterminé, c'est-à-dire quand l'une des quantités A, B, ... cessera d'être finie ou déterminée;

mais les fonctions u, v, ... n'en existeront pas moins pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles cette circonstance exceptionnelle ne se présentera pas.

Les équations (1) *ne possèdent qu'une seule intégrale développable en série ordonnée suivant les puissances de* $t - t^0$, *telle que* u, v, ... *se réduisent pour* $t = t^0$ *à des fonctions données* φ, ψ, ... *de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si, outre l'intégrale u, v, ... jouissant des propriétés énoncées, le système possédait une seconde intégrale jouissant des mêmes propriétés, on pourrait représenter cette nouvelle intégrale par $u + \varepsilon$, $v + \eta$, ...; les fonctions ε, η, ... devraient alors s'annuler pour $t = t^0$. Si alors, dans (1), on remplace u par $u + \varepsilon$, v par $v + \eta$, ..., on aura, en marquant par un Δ les accroissements que subissent alors les diverses fonctions qui entrent dans ces formules,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \mathrm{K} + \Delta\mathrm{K} + (\mathrm{A}_1 + \Delta\mathrm{A}_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}\right) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait alors usage des formules (1), puis si l'on développe $\Delta\mathrm{A}_1$, $\Delta\mathrm{A}_2$, ... suivant les puissances de ε, de η, ..., on aura

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Delta\mathrm{K} + \Delta\mathrm{A}_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + (\mathrm{A}_1 + \Delta\mathrm{A}_1)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + \ldots, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \Delta\mathrm{K}'_1 + \Delta\mathrm{A}'_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + (\mathrm{A}'_1 + \Delta\mathrm{A}'_1)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or, si l'on suppose ε et η développés par la formule de Taylor

$$\varepsilon = \frac{(t - t^0)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon}{\partial t^\alpha}\right)_0 + \frac{(t - t^0)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}\left(\frac{\partial \varepsilon^{\alpha+1}}{\partial t^{\alpha+1}}\right)_0 + \ldots,$$
$$\eta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

puisque ε et η sont nuls pour $t = t^0$, on voit que tous les termes du second membre de la première formule (B) seront infiniment petits de l'ordre α au moins, tandis que le premier membre sera de l'ordre $\alpha - 1$: ce résultat absurde montre que ε, η, ... sont identiquement nuls. C. Q. F. D.

Remarque. — Il peut arriver que des équations aux dérivées partielles linéaires, bien que distinctes au point de vue algébrique, ne puissent pas, comme nous l'avons supposé, être résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues prises par rapport à une même variable; nos conclusions tomberont alors en défaut : ainsi le système

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} = 0$$

ne peut avoir pour solutions que $u + v =$ const. Plus généralement, les équations

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

que nous avons rencontrées en essayant de généraliser une solution complète d'une équation du premier ordre, ne dépendent que d'une seule fonction arbitraire quand on y considère $a_1, a_2, \ldots$ comme les inconnues. Mais il pourra aussi arriver qu'un simple changement de variable fasse rentrer le cas particulier que l'on considère dans le cas général.

IV. — Équations aux dérivées partielles qui ne contiennent pas les fonctions inconnues.

Lorsqu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ne contient pas les fonctions inconnues elles-mêmes, on peut toujours ramener son intégration à celle d'un système d'équations linéaires; l'intégrale générale, d'ailleurs, se compose de fonctions qui, pour une valeur particulière de l'une des variables, se réduisent à des fonctions données des autres variables.

En effet, résolvons le système à intégrer par rapport aux dérivées des fonctions inconnues prises par rapport à une

même variable : il pourra se présenter sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \chi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \psi, \quad \ldots,$$

$u, v, w, \ldots$ désignant les fonctions inconnues, $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, les variables et $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ et de $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots$, en posant pour abréger

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad r_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \ldots.$$

Intégrer le système (1), cela revient à trouver des fonctions $u, v, \ldots, p_i, q_i, \ldots$ telles que l'on ait

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} du = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n + \varphi\, dt, \\ dv = q_1 dx_1 + \ldots + q_n dx_n + \chi\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

pour cela, il suffit de calculer $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ de telle sorte que les seconds membres (2) soient des différentielles exactes; les valeurs de $u, v, \ldots$ seront alors fournies par des quadratures.

Pour qu'il en soit ainsi (p. 202, t. III), on a vu qu'il suffisait que l'on eût :

1° Quels que soient $x_1, x_2, \ldots, t$,

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum\limits_k \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_k}\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum\limits_k \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_k}\dfrac{\partial q_k}{\partial x_i} + \ldots, \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial \chi}{\partial x_i} + \sum\limits_k \dfrac{\partial \chi}{\partial p_k}\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum\limits_k \dfrac{\partial \chi}{\partial q_k}\dfrac{\partial q_k}{\partial x_i} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

2° Que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ fussent les dérivées d'une même fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour une valeur de t^0 particulière de t; que $q_1, q_2, \ldots, q_n$ fussent les dérivées d'une même fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour la même valeur t^0 de t, etc.

C'est ce à quoi l'on parviendra si, considérant les équations (3) comme linéaires aux dérivées partielles par rapport

à $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots,$ on les intègre de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$\begin{array}{lll} p_1 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_1}, & p_2 = \dfrac{\partial \varpi}{\partial x_2}, & \ldots, \\ q_1 = \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1}, & q_2 = \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2}, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

$\omega, \omega, \ldots$ désignant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, auxquelles se réduiront $u, v, w, \ldots,$ pour $t = t^0$.

V. — Équations quelconques aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons enfin un système quelconque d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad \varphi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \psi = 0,$$

que nous supposerons, pour fixer les idées, au nombre de trois, φ, χ, ψ désignant des fonctions données des fonctions inconnues u, v, w de leurs variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i}, \dfrac{\partial w}{\partial x_i}, \ldots$. Admettons un instant que ces équations possèdent une intégrale et que cette intégrale soit représentée par les équations

$$(2) \qquad F = a, \qquad G = b, \qquad H = c,$$

F, G, H désignant des fonctions de $u, v, w, x_1, \ldots, x_n$ et a, b, c trois constantes arbitraires; si des équations (2) et de leurs dérivées

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \right.$$

on tire u, v, w et leurs dérivées pour les porter dans (1), ces formules (1) deviendront des identités, c'est-à-dire seront satisfaites quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, a, b, c$. Ceci revient à dire que, si des formules (3) on tire les valeurs des $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i}$ pour les porter dans (1), les équations résultantes seront identiques quand on remplacera u, v, w par leurs valeurs tirées de (2); mais elles sont identiques sans qu'il soit besoin de faire cette dernière substitution, car on peut toujours choisir a, b, c de manière à faire acquérir à u, v, w des valeurs arbitraires, et, comme elles ont lieu quels que soient a, b, c, elles ont aussi lieu quels que soient u, v, w.

Ainsi les fonctions F, G, H, si elles existent, satisferont aux équations différentielles obtenues en remplaçant dans (1) $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i}$ par leurs valeurs tirées de (3), à savoir

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x_i, v, w)} : \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}, \\ \frac{\partial v}{\partial x_i} &= -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, x_i, w)} : \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_i} &= -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, x_i)} : \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, que j'appellerai

$$(5)\qquad \varphi' = 0, \qquad \chi' = 0, \qquad \psi' = 0,$$

sont aux dérivées partielles du premier ordre et ne contiennent pas les fonctions inconnues F, G, H, et les nouvelles variables sont $u, v, w, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les équations (5) admettent, comme on l'a vu au paragraphe précédent, une intégrale générale et, par suite, une infinité de solutions particulières : je dis que, si F, G, H constituent une solution de (5), les équations (2) constitueront un système déterminant des valeurs de u, v, w, satisfaisant aux équations (1). En effet, si de (2) on tire $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i}$ ou, ce qui revient au même, si on les tire de (4), les formules (5),

qui sont identiques, se transforment dans les équations (1), qui alors sont identiquement satisfaites.

Les équations (1) ont donc aussi une intégrale générale; car, si l'on fait $x_1 = x_1^0$, on peut faire en sorte que F, G, H deviennent des fonctions données de $x_2, x_3, \ldots, x_n, u, v, w$, et, par suite, on peut faire en sorte que, pour $x = x_1^0$, les équations (2) fournissent pour u, v, w des valeurs données fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

VI. — Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

Les équations d'ordre supérieur au premier, aux dérivées partielles, se ramènent facilement à des équations du premier ordre et, par suite, sont intégrables. Pour ne pas compliquer les choses, nous considérerons une seule équation à une seule inconnue u

$$\varphi\left(u, x_1, x_2, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0;$$

il est bien clair que l'on peut remplacer l'intégration de cette équation par celle des suivantes

$$\varphi\left(u, x_1, x_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = 0,$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

qui sont du premier ordre.

On voit, en outre, que la valeur la plus générale de u est telle que l'on peut choisir arbitrairement $u, u_1, u_2, \ldots$ pour $x_1 = x_1^0$. En général :

L'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles pourra s'effectuer de telle sorte que, t désignant une des variables indépendantes, on pourra choisir arbitrairement, pour $t = t_0$, les fonctions inconnues et leurs dérivées d'ordre immédiatement inférieur à celui avec lequel elles entrent dans les équations.

VII. — Méthode de Cauchy pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

Soient u, v, w, ... des fonctions inconnues des variables t, x, y, z, ... et L, M, N, ... des fonctions linéaires homogènes et à coefficients constants de u, v, w et de leurs dérivées en nombre fini, relatives à t, x, y, ...; soient enfin

$$f(x, y, \ldots, t), \quad g(x, y, \ldots, t), \quad \ldots$$

des fonctions données de x, y, ..., t; nous allons montrer comment Cauchy a intégré les équations linéaires et à coefficients constants (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* t. I, p. 76)

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{L}\left(u, v, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots\right) - f = 0, \\ \mathrm{M}\left(u, v, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots\right) - g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

en nombre égal à celui des fonctions inconnues u, v, ...

Désignons par S un symbole opératoire défini par l'équation

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{S}\Theta(\xi, \eta, \ldots) \\ \quad = \displaystyle\int\int \ldots e^{[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\ldots]\sqrt{-1}}\Theta(\xi, \eta, \ldots)\frac{d\alpha\, d\xi}{2\pi}\frac{d\beta\, d\eta}{2\pi}\ldots, \end{array}\right.$$

l'exponentielle ne contenant pas t et les limites des intégrales étant $-\infty$ et $+\infty$.

Posons alors

$$(3) \qquad u = \mathrm{SU}, \quad v = \mathrm{SV}, \quad w = \mathrm{SW}, \quad \ldots,$$

U, V, ... désignant des fonctions de ξ, η, ζ, ..., t; la formule de Fourier donnera (p. 406, t. III)

$$f = \mathrm{S}f(\xi, \eta, \ldots, t), \qquad g = \mathrm{S}g(\xi, \eta, \ldots, t), \qquad \ldots;$$

les formules (1) pourront alors s'écrire

$$S\left[L\left(U, V, \ldots, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \ldots, U\alpha\sqrt{-1}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \ldots\right) - f(\xi, \ldots, t)\right] = 0,$$
$$S\left[M\left(U, V, \ldots, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \ldots, U\alpha\sqrt{-1}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \ldots\right) - g(\xi, \ldots, t)\right] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les formules (3) donneront les solutions des équations (1) si l'on détermine U, V, W, ... au moyen des équations linéaires ordinaires

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l} L\left(U, V, \ldots, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \ldots, U\alpha\sqrt{-1}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \ldots\right) - f(\xi, \ldots, t) = 0, \\ M\left(U, V, \ldots, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \ldots, U\alpha\sqrt{-1}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \ldots\right) - g(\xi, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dans lesquelles t est seule variable indépendante. Supposons que l'on intègre, par exemple, par la méthode de Cauchy (p. 296, t. V), les équations (4) de telle sorte que, pour $t = t_0$, U, V, ... se réduisent à des fonctions données u^0, v^0, ... de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; que leurs dérivées $\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \ldots$ se réduisent aussi à des fonctions données (si c'est possible) pour $t = t_0, \ldots$, les valeurs de u, v, ... données par les équations (3) jouiront de la double propriété : 1° de satisfaire aux formules (1); 2° de se réduire, ainsi que leurs dérivées relatives à t, à des fonctions données de $x, y, z, \ldots$.

VIII. — Application à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur. Il faudra

poser

$$u = \overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}\, e^{[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]\sqrt{-1}} \frac{d\xi\, d\alpha}{2\pi} \frac{d\eta\, d\beta}{2\pi} \frac{d\zeta\, d\gamma}{2\pi}$$

et intégrer l'équation

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = -a^2(\alpha^2\mathrm{U} + \beta^2\mathrm{U} + \gamma^2\mathrm{U});$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{U} = e^{-t^2\omega^2(t-t_0)} f(\xi, \eta, \zeta),$$

ω^2 désignant pour abréger $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $f(\xi, \eta, \zeta)$ désignant une fonction arbitraire; on aura alors

$$u = \overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{\sqrt{-1}[\alpha(x-\xi)+\ldots]} e^{-a^2\omega^2(t-t_0)} f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\alpha\, d\xi}{2\pi} \frac{d\beta\, d\eta}{2\pi} \frac{d\gamma\, d\zeta}{2\pi},$$

et u se réduira à $f(x, y, z)$ pour $t = t_0$. On peut écrire cette solution sous la forme

$$u = \int\int\int\int\int\int e^{-a^2\omega^2(t-t_0)} \cos[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)] f(\xi, \eta, \zeta) \times \frac{d\alpha\, d\xi}{2\pi} \frac{d\beta\, d\eta}{2\pi} \frac{d\gamma\, d\zeta}{2\pi}$$

et même sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} u = \int\int\int\int\int\int e^{-a^2\omega^2(t-t_0)} \cos\alpha(x-\xi) \cos\beta(y-\eta) \cos\gamma(z-\zeta) \\ \quad \times f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\alpha\, d\xi}{2\pi} \frac{d\beta\, d\eta}{2\pi} \frac{d\gamma\, d\zeta}{2\pi}. \end{cases}$$

Or on a (p. 260, t. III)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2(t-t_0)} \cos\alpha(\xi - x)\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-t_0)}};$$

en faisant usage de cette formule, (1) devient

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[4\pi a(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{r^2}{4(t-t_0)}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

en posant pour abréger $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$; on simplifie un peu cette valeur de u en posant

$$\xi = 2\lambda\sqrt{t - t_0} + x, \qquad \eta = 2\mu\sqrt{t - t_0} + y, \qquad \zeta = 2\nu\sqrt{t - t_0} + z,$$

et l'on a

$$u = \overline{\underline{\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}} f(x + 2\lambda\sqrt{t - t_0}, \ldots) e^{-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)} d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

IX. — Intégration de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

En appliquant la méthode de Cauchy, on a

$$u = \int \ldots \mathrm{U}\, e^{[\alpha(x-\xi)+\ldots]\sqrt{-1}} \frac{d\alpha\, d\xi}{2\pi} \ldots,$$

et U est déterminé par l'équation

$$\frac{d^2 \mathrm{U}}{dt^2} = -a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\mathrm{U},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)\cos a\rho t + \frac{1}{a\rho} f(\xi, \eta, \zeta)\sin a\rho t.$$

En posant pour abréger

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

la valeur de u se représente donc sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u = &\int\int \ldots \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)\cos a\rho t\, e^{[\alpha(\xi-x)+\ldots]\sqrt{-1}} \frac{d\alpha\, d\xi\, d\beta\, d\eta\, d\gamma\, d\zeta}{8\pi^3} \\ &+ \int\int \ldots f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\sin a\rho t}{a\rho} e^{[\alpha(\xi-x)+\ldots]\sqrt{-1}} \frac{d\alpha\, d\xi\, d\beta\, d\eta\, d\gamma\, d\zeta}{8\pi^3} \end{aligned}\right.$$

et se réduit à $\mathrm{F}(x, y, z)$ pour $t = 0$; sa dérivée relative à t se réduit dans les mêmes conditions à $f(x, y, z)$.

Occupons-nous d'abord de la seconde intégrale et consi-

dérons $\alpha, \beta, \gamma; x, y, z$ et ξ, η, ζ comme des coordonnées : posons

$$\xi = x + r\cos\psi\sin\theta, \qquad \eta = y + r\sin\psi\sin\theta, \qquad \zeta = z + r\cos\theta;$$

r, θ, ψ seront les coordonnées polaires du point ξ, η, ζ. Prenons pour nouvel axe des z la droite qui joint les points x, y, z et ξ, η, ζ, et posons

$$\alpha = \rho\cos\psi'\sin\theta', \qquad \beta = \rho\sin\psi'\sin\theta', \qquad \gamma = \rho\cos\theta';$$

ρ, θ', ψ' seront les coordonnées polaires du point α, β, γ. La seconde intégrale, qui figure dans la formule (1), prendra la forme

$$\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\psi\sin\theta, \ldots)$$
$$\times \frac{1}{a\rho}\sin a\rho t\, e^{r\rho\cos\theta'\sqrt{-1}}\rho^2 r^2 \sin\theta'\sin\theta\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\theta'\, d\psi'\, d\psi;$$

l'intégration peut être effectuée par rapport à θ' et par rapport à ψ'; on a alors

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\psi\sin\theta, \ldots)$$
$$\times \sin a\rho t \sin\rho r \frac{r}{a}\sin\theta\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\psi$$

ou bien

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\psi\sin\theta, \ldots)$$
$$\times [\cos\rho(at - r) - \cos\rho(at + r)]\frac{r}{a}\sin\theta\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\psi$$

ou bien encore, en supposant l'intégrale suivante finie,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\psi\sin\theta, \ldots)$$
$$\times \cos\rho(at - r)\frac{r}{a}\sin\theta\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule de Fourier,

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+at\cos\psi\sin\theta,\ y+at\sin\psi\sin\theta,\ z+at\cos\theta)\,t\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Dès lors, il est facile de voir que la formule (1) peut se mettre sous la forme

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+at\cos\psi\sin\theta,\ y+at\sin\psi\sin\theta,\ z+at\cos\theta)\,t\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$
$$+\frac{d}{dt}\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x+at\cos\psi\sin\theta,\ y+at\sin\psi\sin\theta,\ z+at\cos\theta)\,t\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

Cette transformation de la valeur de u a été effectuée par Poisson (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. III).

X. — Application à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

de telle sorte que la fonction u prenne des valeurs données sur les faces d'un parallélépipède donné. Soient $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ les équations des faces de ce parallélépipède : nous poserons

$$u=\iiiint\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\varphi(\xi,\eta,z)\,e^{[\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)]\sqrt{-1}}\,d\xi\,d\alpha\,d\eta\,d\beta,$$

les limites de l'intégrale étant infinies; nous aurons alors à déterminer φ par l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}-(\alpha^2+\beta^2)\varphi=0;$$

on aura donc

$$\varphi=\mathrm{A}e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\mathrm{B}e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Déterminons A et B, de telle sorte que, pour $z = \pm c$, on ait $\varphi = f_1(\xi, \eta)$ ou $f_2(\xi, \eta)$; il faudra que

$$A e^{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + B e^{-c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = f_1(\xi, \eta),$$
$$A e^{-c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + B e^{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = f_2(\xi, \eta);$$

donc

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{e^{\omega} f_1 - e^{-\omega} f_2}{e^{2\omega} - e^{-2\omega}}, \\ B &= \frac{e^{\omega} f_2 - e^{-\omega} f_1}{e^{2\omega} - e^{-2\omega}}, \end{aligned}\right\} \quad \omega = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2};$$

si l'on prend alors

$$u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \frac{(e^{\omega} f_1 - e^{-\omega} f_2)\, e^{\frac{z}{c}\omega} + (e^{\omega} f_2 - e^{-\omega} f_1)\, e^{\frac{z}{c}\omega}}{e^{2\omega} - e^{-2\omega}}$$
$$\times \cos[\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y)]\, d\xi\, d\alpha\, d\eta\, d\beta,$$

u se réduira à $f_1(x, y)$ pour $z = +c$ et à $f_2(x, y)$ pour $z = -c$; si l'on prend les limites des intégrales relatives à ξ et à η égales à $-a$ et à $+a$, à $-b$ et à $+b$, u sera nul pour toutes les valeurs de x et de y, telles que

$$x^2 > a^2, \qquad y^2 > b^2;$$

par conséquent, pour $x = \pm a$ et $y = \pm b$, u sera nul. Appelons u_c cette solution : il est clair que

$$u_a + u_b + u_c$$

sera une solution jouissant des propriétés demandées.

Remarque. — On peut évidemment modifier la méthode d'intégration que nous venons de suivre et employer des séries, au lieu des intégrales multiples que nous avons introduites dans nos solutions. Ainsi, dans le problème que nous venons de traiter en dernier lieu, on aurait pu poser

$$u = \sum\sum\int\int\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varphi(\xi, \eta, z)\, e^{[\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y)]\sqrt{-1}}\, d\xi\, d\eta;$$

α et β auraient alors été des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$

et la fonction φ aurait toujours été déterminée de la même façon. Les développements en série sont souvent employés en Physique mathématique.

XI. — Sur l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4q\frac{\partial u}{\partial q} = 0$.

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4q\frac{\partial u}{\partial q} = 0 \tag{1}$$

est célèbre : elle se ramène à la forme linéaire à coefficients constants en posant

$$q = e^{-4t};$$

on a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{2}$$

nous l'intégrerons par séries et nous poserons

$$u = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \int \frac{1}{2\pi}\varphi(\xi, t)e^{\alpha(\xi-x)\sqrt{-1}}d\xi.$$

Nous aurons alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum \int \frac{1}{2\pi}\varphi(\xi, t)e^{\alpha(\xi-x)\sqrt{-1}}(-\alpha^2)d\xi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \int \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}e^{\alpha(\xi-x)\sqrt{-1}}d\xi,$$

et l'on satisfera à l'équation (2) en posant

$$\frac{d\varphi}{dt} + \alpha^2\varphi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi = Ce^{-\alpha^2 t};$$

on aura alors

$$u = \sum \int \frac{1}{2\pi}Ce^{-\alpha^2 t + \alpha(\xi-x)\sqrt{-1}}d\xi,$$

C désignant une fonction arbitraire de ξ et de α. Si l'on remplace t par $-\frac{1}{4}\log q$, on aura l'intégrale de (1)

$$u = \sum \int C q^{\frac{\alpha^2}{4}} e^{\alpha(\xi - x)\sqrt{-1}} d\xi$$

ou encore

$$u = \sum \int C q^{\frac{\alpha^2}{4}} \cos\alpha(\xi - x)\, d\xi;$$

si l'on fait $C = -\frac{1}{4\alpha}$, on trouve

$$u = q^{\frac{1}{4}} \sin x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + \ldots,$$

c'est-à-dire (p. 354, t. IV)

$$u = \frac{1}{2} H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).$$

XII. — Sur une sorte de paradoxe.

Considérons l'équation très simple

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

on peut l'intégrer de deux manières par la méthode de Cauchy, et faire dépendre sa solution de l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre en t, ou du second ordre en x. Dans le premier cas, la solution renfermera *une* fonction arbitraire de x; dans le second, elle renfermera *deux* fonctions arbitraires de t : il y a là une sorte de paradoxe qui se présentera évidemment dans un grand nombre d'autres cas et que l'on peut, sinon faire disparaître, au moins expliquer en partie au moyen du raisonnement suivant dû à Poisson.

Essayons de développer la fonction u qui satisfait à l'équation (1) en série, par la formule de Maclaurin. En ordonnant d'abord par rapport aux puissances de t et en

prenant u arbitrairement et égal à $\varphi(x)$ pour $t = 0$, on aura

$$\int^{t=0} \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi''(x), \qquad \int^{t=0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi^{\text{IV}}(x), \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$(2) \qquad u = \varphi(x) + \frac{t}{1}\varphi''(x) + \frac{t^2}{1.2}\varphi^{\text{IV}}(x) + \frac{t^3}{1.2.3}\varphi^{\text{VI}}(x) + \ldots;$$

au contraire, si l'on se donne u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ respectivement égaux à $\psi(t)$ et $\chi(t)$ pour $x = 0$, on a

$$\int^{x=0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi'(t), \qquad \int^{x=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \chi'(t), \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$(3) \qquad u = \psi(t) + x\chi(t) + \frac{x^2}{1.2}\psi'(t) + \frac{x^3}{1.2.3}\chi'(t) + \ldots.$$

On peut toujours choisir les fonctions φ, χ, ψ de manière que les séries (2) et (3) soient convergentes et satisfassent à (1), et, bien que la condition de convergence restreigne la généralité des fonctions φ, χ, ψ et soit à la rigueur une raison suffisante pour faire concevoir l'équivalence d'une fonction arbitraire et de deux fonctions arbitraires, on peut montrer directement l'équivalence des formules (2) et (3) en posant

$$\psi(t) = \text{A} + \text{B}\,\frac{t}{1} + \text{C}\,\frac{t^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\chi(t) = \text{A}' + \text{B}'\,\frac{t}{1} + \text{C}'\,\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

La formule (3) devient alors

$$\begin{aligned} u = {} & \text{A} + \text{A}'x + \text{B}\,\frac{x^2}{1.2} + \text{B}'\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \\ & + \frac{t}{1}\left(\text{B} + \text{B}'\,\frac{x}{1} + \text{C}\,\frac{x^2}{1.2} + \text{C}'\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ & + \frac{t^2}{1.2}\left(\text{C} + \text{C}'\,\frac{x}{1} + \ldots\right) + \ldots, \end{aligned}$$

formule équivalente à (2) si l'on suppose

$$\varphi(x) = \text{A} + \text{A}'x + \frac{\text{B}x^2}{1.2} + \text{B}'\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Ce calcul, à notre avis, n'explique pas complètement le paradoxe, parce que rien ne prouve que (2) et (3) soient les intégrales les plus générales de (1) : rien ne prouve non plus que la méthode de Cauchy fournisse l'intégrale la plus générale de cette équation ; d'ailleurs, les conditions de convergence imposées aux séries (2) et (3) ne permettent pas de considérer φ, χ, ψ comme des fonctions tout à fait arbitraires ; des conditions analogues sont imposées aux fonctions en apparence arbitraires qui entrent dans les intégrales de Cauchy. Quoi qu'il en soit, il plane un nuage sur la théorie qui nous occupe, et il est bon de le signaler, bien qu'il ne nous soit pas possible de le dissiper.

XIII. — Intégration d'un système à plusieurs inconnues.

Désignons par u, v, w trois fonctions inconnues de x, y, z, t, et par A, B, A', ... des symboles opératoires définis par des équations, telles que

$$\begin{aligned} Au &= a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a'\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a''\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + \ldots, \\ Bu &= a_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a'_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a''_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2b_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

a, b, a', ..., a_1, ... désignant des constantes, en sorte que Au désignera une fonction linéaire des dérivées secondes de u, prises par rapport à x, y, z, mais non par rapport à t.

Les équations

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Au + B''v + B'w, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= B''u + A'v + Bw, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= B'u + Bv + A''w \end{aligned} \right.$$

se rencontrent dans les questions les plus importantes de la

Physique mathématique : alors x, y, z désignent les coordonnées d'un point de l'espace et t le temps; quant à u, v, w, ces quantités peuvent, suivant les cas, avoir des significations diverses.

Pour intégrer les équations (1), nous suivrons la méthode de Cauchy, et, posant en général

$$\mathop{\mathrm{S}} f(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta, t) e^{\sqrt{-1}[(\xi-x)\alpha+(\eta-y)\beta+(\zeta-z)\gamma]} d\xi\, d\alpha\, d\eta\, d\beta\, d\zeta\, d\gamma$$

nous désignerons par u_1, v_1, w_1 des fonctions de ξ, η, ζ, t, et nous ferons

$$u = \mathop{\mathrm{S}} u_1, \qquad v = \mathop{\mathrm{S}} v_1, \qquad w = \mathop{\mathrm{S}} w_1;$$

alors nous aurons

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathop{\mathrm{S}} \frac{d^2 u_1}{dt^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathop{\mathrm{S}} \frac{d^2 v_1}{dt^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathop{\mathrm{S}} \frac{d^2 w_1}{dt^2}, \\
-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathop{\mathrm{S}} \alpha^2 u_1, \qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mathop{\mathrm{S}} \alpha\beta u_1, \qquad \ldots, \\
\mathrm{A} u = \mathop{\mathrm{S}} \mathrm{P} u_1, \qquad \mathrm{B}'' v = \mathop{\mathrm{S}} \mathrm{Q}'' v, \qquad \ldots.
\end{gathered}$$

En désignant par P, P', P'', Q, Q', Q'' les quantités

$$-\mathrm{P} = a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 + 2b\,\beta\gamma + 2b'\alpha\gamma + 2b''\alpha\beta, \qquad \ldots,$$

que l'on obtient en remplaçant dans $\mathrm{A}u$, $\mathrm{B}u$, ..., les dérivées relatives à x^2, y^2, z^2, yz, ... par α^2, β^2, γ^2, $\beta\gamma$, ..., et si l'on porte ces valeurs dans (1), ces équations deviendront

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathrm{S}}\left(-\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \mathrm{P} u_1 + \mathrm{Q}'' v_1 + \mathrm{Q}' w_1\right) = 0, \\
&\mathop{\mathrm{S}}\left(-\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \mathrm{Q}'' u_1 + \mathrm{P}' v_1 + \mathrm{Q} w_1\right) = 0, \\
&\mathop{\mathrm{S}}\left(-\frac{d^2 w_1}{dt^2} + \mathrm{Q}' u_1 + \mathrm{Q} v_1 + \mathrm{P}'' w_1\right) = 0,
\end{aligned}$$

et l'on y satisfera en déterminant u_1, v_1, w_1 au moyen des équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dt^2} = P u_1 + Q'' v_1 + Q' w_1, \\ \dfrac{d^2 v_1}{dt^2} = Q'' u_1 + P' v_1 + Q w_1, \\ \dfrac{d^2 w_1}{dt^2} = Q' u_1 + Q v_1 + P'' w_1. \end{cases}$$

Nous allons intégrer ces équations de telle sorte que, pour $t = 0$, u_1, v_1 et w_1 se réduisent respectivement à $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\chi(\xi, \eta, \zeta)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ et que leurs dérivées $\dfrac{du_1}{dt}$, $\dfrac{dv_1}{dt}$, $\dfrac{dw_1}{dt}$ se réduisent alors à φ', χ', ψ'. Alors $S u_1$, $S v_1$, $S w_1$ satisferont à (1) et se réduiront dans les mêmes circonstances à

$$\varphi'(x, y, z), \quad \chi'(x, y, z), \quad \psi'(x, y, z),$$

et cela en vertu de la formule de Fourier.

Conformément à la règle donnée par Cauchy (t. V, p. 296), on posera

$$u_1 = \mathcal{E} \frac{e^{st}\theta_1(s)}{F(s)}, \qquad v_1 = \mathcal{E} \frac{e^{st}\theta_2(s)}{F(s)}, \qquad w_1 = \mathcal{E} \frac{e^{st}\theta_3(s)}{F(s)},$$

$$F(s) = \begin{vmatrix} P - s^2 & Q'' & Q' \\ Q'' & P' - s^2 & Q \\ Q' & Q & P'' - s^2 \end{vmatrix},$$

et θ_1, θ_2, θ_3 seront déterminés par les équations

$$\begin{aligned} \theta_1(P - s^2) + \theta_2 Q'' + \theta_3 Q' &= \lambda F(s), \\ \theta_1 Q'' + \theta_2(P' - s^2) + \theta_3 Q &= \mu F(s), \\ \theta_1 Q' + \theta_2 Q + \theta_3(P'' - s^2) &= \nu F(s), \end{aligned}$$

en sorte que l'on aura

$$u_1 = \mathcal{E} \frac{e^{st}\left(\lambda \dfrac{\partial F}{\partial P} + \mu \dfrac{\partial F}{\partial Q''} + \nu \dfrac{\partial F}{\partial Q'}\right)}{F(s)}, \qquad v_1 = \ldots, \qquad w_1 = \ldots,$$

λ, μ, ν désignant trois fonctions linéaires arbitraires de s dont

nous allons disposer pour satisfaire aux conditions initiales. Pour $t = 0$, on a

$$u_1 = \mathcal{E}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial P} + \mu \frac{\partial F}{\partial Q''} + \nu \frac{\partial F}{\partial Q'}\right) \frac{1}{F(s)},$$

$$\frac{du_1}{dt} = \mathcal{E}\left(\lambda \frac{\partial F}{\partial P} + \mu \frac{\partial F}{\partial Q''} + \nu \frac{\partial F}{\partial Q'}\right) \frac{s}{F(s)};$$

$F(s)$ est du sixième degré, $\frac{\partial F}{\partial P}$ du quatrième et $\frac{\partial F}{\partial Q'}$, $\frac{\partial F}{\partial Q}$ du second, ces deux derniers polynômes ne fourniront pas de terme au résidu. Si l'on remplace alors λ par $ms + n$ et u_1 par φ, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ par φ', on trouve

$$\varphi = \mathcal{E}\, ms \frac{\partial F}{\partial P} \frac{1}{F(s)}, \qquad m = -\varphi,$$

$$\varphi' = \mathcal{E}\, ns \frac{\partial F}{\partial P} \frac{1}{F(s)}, \qquad n = -\varphi',$$

de sorte que

$$u_1 = -\mathcal{E} \frac{e^{st}(s\varphi + \varphi')}{F(s)} \frac{\partial F}{\partial P}$$

ou, remplaçant $\frac{\partial F}{\partial P}$ par $f(s)$, qui sera du quatrième degré sans termes de degré impair,

$$u_1 = -\mathcal{E} \frac{e^{st}(s\varphi + \varphi')f(s)}{F(s)}$$

ou

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{st}(s\varphi + \varphi')f(s)}{F(s)} ds$$

et, par suite,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u = &-\frac{1}{(2\pi)^4\sqrt{-1}} \iiiint\!\!\iiint\!\!\int d\xi\, d\alpha\, d\eta\, d\beta\, d\zeta\, d\gamma\, ds \\ &\times e^{\sqrt{-1}\,[\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\gamma(\zeta-z)]+st} \frac{(s\varphi + \varphi')f(s)}{F(s)}; \end{aligned} \right.$$

v et w se calculent de la même façon ; on peut simplifier cette solution. Considérons, en effet, α, β, γ comme des coordon-

nées rectangulaires; soient alors r la distance du point α, β, γ à l'origine, a, b, c les cosinus directeurs du rayon r, et posons

$$\alpha = ra = r\cos\psi\sin\theta,$$
$$\beta = rb = r\sin\psi\sin\theta,$$
$$\gamma = rc = r\cos\theta.$$

Soient a', b', c' et a'', b'', c'' six cosinus directeurs de droites formant avec r trois directions rectangulaires : posons

$$\xi = a\xi' + a'\eta' + a''\zeta',$$
$$\eta = b\xi' + b'\eta' + b''\zeta',$$
$$\zeta = c\xi' + c'\eta' + c''\zeta';$$

posons enfin

$$s = \sigma r\sqrt{-1}$$

et observons que les coefficients P, P′, P″, Q, Q′, Q″ contiennent α, β, γ au second degré sous forme homogène, en sorte que

$$F(\sigma r\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad f(\sigma r\sqrt{-1})$$

peuvent se mettre sous les formes

$$r^3 F(\sigma\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad r^4 f(\sigma\sqrt{-1});$$

la formule (3) deviendra

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,r\,d\sigma$$
$$\times e^{r\sqrt{-1}(\xi'-h+\sigma t)}\frac{(r\sigma\sqrt{-1}\varphi+\varphi')}{r^2 F(\sigma\sqrt{-1})}f(\sigma\sqrt{-1}),$$

h désignant, pour abréger, la quantité,

$$ax + by + cz = x\cos\psi\sin\theta + y\sin\psi\sin\theta + z\cos\theta.$$

Si l'on effectue les intégrations relatives à η' et ζ', en appelant $\Phi(\xi')$ et $\Phi'(\xi')$ les intégrales de $\varphi(\xi', \eta', \zeta')$ et $\varphi'(\xi', \eta', \zeta')$, on

a cette valeur plus simple de u,

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\xi'\, r\, d\sigma \times e^{r\sqrt{-1}(\xi'-h+\sigma t)}\, \frac{r\sigma\sqrt{-1}\,\Phi + \Phi'}{F(\sigma\sqrt{-1})}\, f(\sigma\sqrt{-1}),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$u = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{d^2}{dt^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\xi'\, d\sigma\, e^{r\sqrt{-1}(\xi'-h+\sigma t)}\,\frac{\Phi f(\sigma\sqrt{-1})}{\sigma F(\sigma\sqrt{-1})}$$
$$+ \frac{\sqrt{-1}}{(2\pi)^4}\frac{d}{dt}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\xi'\, d\sigma\, e^{r\sqrt{-1}(\xi'-h+\sigma t)}\,\frac{\Phi' f(\sigma\sqrt{-1})}{\sigma F(\sigma\sqrt{-1})}.$$

Cette fois la formule de Fourier permet de faire l'intégration par rapport à r et ξ'; mais, comme r ne varie que de 0 à ∞, on prendra pour limites $-\infty$ et $+\infty$ en divisant le résultat par 2, ce qui donne

$$u = \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{d^2}{dt^2}\int\!\!\int\!\!\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\sigma\, \frac{\Phi(h-\sigma t) f(\sigma\sqrt{-1})}{\sigma F(\sigma\sqrt{-1})}$$
$$+ \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{d}{dt}\int\!\!\int\!\!\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\sigma\, \frac{\Phi'(h-\sigma t) f(\sigma\sqrt{-1})}{\sigma F(\sigma\sqrt{-1})}.$$

On trouverait des valeurs analogues pour v et w; les limites pour θ et ψ sont 0 et π, 0 et 2π.

XIV. — Intégration d'un système d'équations linéaires et à coefficients variables.

La méthode de Lagrange s'applique très bien au système suivant considéré par Jacobi,

$$X_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = U_1,$$
$$X_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n} = U_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_1\frac{\partial u_m}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_m}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial u_m}{\partial x_n} = U_m,$$

dans lequel $X_1, X_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ sont des fonctions quelconques des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_m$. En effet, remplaçons $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ par p_{ij} : nous aurons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 p_{11} + X_2 p_{12} + \ldots + X_n p_{1n} = U_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1 p_{m1} + X_2 p_{m2} + \ldots + X_n p_{mn} = U_m; \end{array} \right.$$

or on a

$$\begin{array}{l} du_1 = p_{11} dx_1 + p_{12} dx_2 + \ldots + p_{1n} dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m = p_{m1} dx_1 + p_{m2} dx_2 + \ldots + p_{mn} dx_n. \end{array}$$

Si l'on tire $p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{m1}$ de là pour les porter dans (1), ces formules deviennent

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 (du_1 - p_{12} dx_2 - \ldots - p_{1n} dx_n) \\ \quad + (X_2 p_{12} + \ldots + X_n p_{1n} - U_1)\, dx_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1 (du_m - p_{m2} dx_2 - \ldots - p_{mn} dx_n) \\ \quad + (X_2 p_{m2} + \ldots + X_n p_{mn} - U_m)\, dx_1 = 0. \end{array} \right.$$

Si nous égalons à zéro les coefficients des p_{ij}, nous obtenons les relations

$$(3) \quad X_1 dx_2 = X_2 dx_1, \qquad X_1 dx_3 = X_3 dx_1, \qquad \ldots, \qquad X_1 dx_n = X_n dx_1,$$

et les équations (2) se réduisent à

$$(4) \qquad U_1 dx_1 = X_1 du_1, \qquad \ldots, \qquad U_m dx_1 = X_1 du_m,$$

en sorte que, si entre les x on établit les relations (3), les relations (4) devront avoir lieu si les fonctions u satisfont aux équations proposées (1). Or les équations (3) et (4) peuvent s'écrire

$$(4\ bis) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du_1}{U_1} = \ldots = \frac{du_m}{U_m}.$$

Soient

$$(5) \qquad \alpha_1 = \varphi_1, \qquad \alpha_2 = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{m+n-1} = \varphi_{m+n-1},$$

leurs intégrales, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, désignant des constantes et φ_1,

$\varphi_2, \ldots,$ des fonctions des u et des x; m de ces équations devront être des conséquences des autres; par suite, si l'on établit m relations arbitraires entre les fonctions φ, ces m relations permettront de calculer $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et seront les intégrales du système proposé.

Jacobi arrive au même résultat par des considérations différentes.

Supposons que l'on ait intégré les équations (4), de telle sorte que pour $x_1 = x_1^0$ on ait $x_2 = x_2^0, \ldots, u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, \ldots$; on pourra mettre leurs intégrales (5) sous les formes

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, \ldots, u_m^0) = 0, \\ \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_{m+n-1} = 0, \end{array} \right.$$

Φ_1, Φ_2 désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots,$ et de $x_1^0, x_2^0, \ldots, u_1^0, u_2^0, \ldots$. Si l'on fait alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1^0 = \varpi_1(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m^0 = \varpi_m(x_2^0, \ldots, x_n^0), \end{array} \right.$$

et si entre (6) et (7) on élimine $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, \ldots, u_n^0$, on aura (p. 19) des équations qui fourniront pour $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se réduisant respectivement à $\varpi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n), \varpi_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots,$ pour $x_1 = x_1^0$, et qui, d'après ce que l'on vient de dire, seront des intégrales des équations proposées (1).

Nous allons faire une application importante de la théorie qui précède.

XV. — Nouvelle méthode pour l'intégration d'une seule équation.

Les équations du paragraphe précédent se présentent dans une circonstance importante. Je suppose que l'on veuille intégrer l'équation du premier ordre

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

où f est une fonction de x, x_1, ..., x_n et de $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, ... Intégrer cette équation revient, comme on l'a déjà dit, à intégrer l'équation aux différentielles totales

$$(2) \qquad du = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + f\, dx,$$

après l'avoir rendue intégrable par un choix convenable de $p_1, p_2, \ldots, p_n$; or le second membre de cette équation (2) (p. 202, t. III) sera une différentielle exacte si l'on a

$$(3) \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \qquad \frac{\partial p_2}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

et si, de plus, pour $x = x^0$,

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

est une différentielle exacte $d\varpi$; or les équations (3) peuvent s'écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_n}; \end{array} \right.$$

ces équations déterminent $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

En les intégrant de manière que, pour $x = x^0$, on ait

$$p_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n},$$

les quantités $p_1, p_2, \ldots$ seront les dérivées partielles de la fonction cherchée u, et l'on aura $\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$; donc les fonctions p satisfont aussi au système déduit de (4) par ce changement, à savoir

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_n}, \end{array}$$

lequel, d'après le paragraphe précédent, s'intégrera en posant

$$dx = -\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

En intégrant ces équations de telle sorte que pour $x = x^0$ on ait $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$ et en éliminant les x^0 et les p^0 entre les intégrales ainsi obtenues et les équations

$$p_1^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0}, \qquad \ldots, \qquad p_n^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n^0},$$

les p étant connus, on aura

$$u = \varpi + \int_{x^0}^{x} (p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n + f\, dt);$$

on retrouve ainsi de la façon la plus simple la règle donnée par Cauchy.

XVI. — Équations de Laplace.

La méthode de Laplace, exposée dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences*, 1778, s'applique aux équations de la forme suivante, où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

$$(1) \qquad s + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z = \mathrm{M},$$

P, Q, Z, M désignant des fonctions de x et y seuls. Si l'on suppose y constant, cette équation pourra s'écrire

$$dq + \mathrm{P}\, dz + (\mathrm{Q}q + \mathrm{Z}z - \mathrm{M})\, dx = 0;$$

elle pourra s'intégrer comme une équation aux différences totales si l'on a

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \mathrm{Z} + \mathrm{PQ} = 0,$$

et son intégrale sera une intégrale première de (1), si l'on considère la constante d'intégration comme fonction arbitraire de y. On obtiendrait de même une intégrale première contenant une fonction arbitraire de x si l'on avait

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - Z + PQ = 0. \tag{3}$$

Nous désignerons par A et B respectivement les premiers membres de (2) et (3); ainsi nous aurons

$$A = \frac{\partial P}{\partial x} - Z + PQ, \qquad B = \frac{\partial Q}{\partial y} - Z + PQ. \tag{4}$$

Supposons maintenant $A \gtrless 0$, $B \gtrless 0$: posons

$$u = q + Pz; \tag{5}$$

on aura

$$z = e^{-\int P dy} \int u e^{\int P dy} dy.$$

Portons cette valeur dans (1); nous aurons, tous calculs faits, en observant que, en vertu de (5), $s + Pp$ n'est autre chose que $\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial P}{\partial x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - A e^{-\int P dy} \int u e^{\int P dy} dy + Qu = M$$

ou

$$\frac{1}{A} e^{+\int P dy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + Qu - M\right) - \int u e^{\int P dy} dy = 0.$$

Différentions par rapport à y et supprimons le facteur $e^{\int P dy}$; nous aurons

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) - u$$
$$+ \left(\frac{P}{A} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{1}{A^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + Qu - M\right) = 0.$$

Nous poserons

$$(6)\quad \begin{cases} P_1 = P - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y}, \\ Q_1 = Q, \\ Z_1 = \dfrac{\partial Q}{\partial y} - A + Q\left(P - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y}\right), \\ M_1 = \dfrac{\partial M}{\partial y} + M\left(P - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y}\right); \end{cases}$$

l'équation à laquelle satisfait u devient alors

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + P_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial u}{\partial y} + Z_1 u = M_1;$$

elle est de même forme que (1). Si les conditions d'intégrabilité s'y appliquent, on pourra l'intégrer et, par suite, intégrer (1); posons alors

$$A_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x} - Z_1 + P_1 Q_1, \qquad B_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial y} - Z_1 + P_1 Q_1;$$

nous aurons

$$A_1 = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + A - \frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y}$$

ou

$$(8)\quad \begin{cases} A_1 = 2A - B - \dfrac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y}, \\ B_1 = A; \end{cases}$$

les formules (8) montrent que B_1 n'est pas nul, mais A_1 peut l'être; dans ce cas, l'équation (1) est intégrable. Si A_1 n'est pas nul, on opérera sur l'équation (7) comme sur (1), et ainsi de suite.

L'inconvénient de la méthode de Laplace est de conduire à des calculs fort longs, sans donner la certitude que l'on ne finira pas par trouver des conditions d'intégrabilité satisfaites.

Si l'on applique la méthode de Laplace à l'équation

$$s = Zz,$$

il est facile de voir qu'elle sera intégrable, si l'une des quantités λ_0, λ_1, λ_2, ..., définies par les équations suivantes, est nulle :

$$Z = \lambda_0, \qquad \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\partial^2 \log \lambda_0}{\partial x \partial y},$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{\partial^2 \log \lambda_0 \lambda_1}{\partial x \partial y}, \qquad \lambda_3 = \lambda_2 - \frac{\partial^2 \log \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\partial x \partial y},$$

. . . .

XVII. — Équations linéaires plus générales.

L'équation linéaire

$$(1) \qquad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C désignent des fonctions quelconques de x et y, et dans laquelle D est une fonction linéaire de z, de $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et de $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ à coefficients fonction de x et y, se ramène facilement au type de Laplace étudié au paragraphe précédent.

En effet, si, à la place de x et y, on prend deux nouvelles variables ξ et η, en laissant indéterminées les relations qui lient x, y, ξ, η, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

En portant ces valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans (1), et en déterminant ξ et η au moyen des équations

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$
$$A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

l'équation (1) se transformera en une autre de même forme, mais ne contenant plus $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$, c'est-à-dire en une équation du genre de celles qui ont été étudiées par Laplace. ξ et η satisfont à la même équation

$$(2)\qquad A\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + C\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 0$$

qui ordinairement se décompose en deux autres linéaires et du premier ordre; si ces équations sont distinctes, leurs solutions pourront être prises pour ξ et η, sinon les solutions d'une même équation linéaire, étant fonctions l'une de l'autre, ne pourront être prises comme variables : la méthode tombera en défaut, mais on pourra toujours faire disparaître deux dérivées secondes, en prenant pour ξ une solution de (2) et pour η une solution de

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)2B + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

après avoir déterminé ξ. Mais cette dernière équation est satisfaite, quel que soit ξ, quand $B^2 = AC$. En effet, en supposant $A = a^2$, $C = b^2$, elle se réduit alors à

$$\left(a\frac{\partial\xi}{\partial x} + b\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = 0,$$

en sorte que l'on pourra choisir η arbitrairement.

XVIII. — Application.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

dans laquelle nous supposerons A, B, C constants : si l'on fait

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \alpha' x + \beta' y,$$

α, β, α', β' désignant des constantes, l'équation transformée devient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\\ &\quad + 2(A\alpha\alpha' + B\alpha\beta' + B\alpha'\beta + C\beta\beta')\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\\ &\qquad + (A\alpha'^2 + 2B\alpha'\beta' + C\beta'^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = 0;\end{aligned}\right.$$

cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0,$$

qui a pour intégrale

$$f(\xi) + F(\eta) = z,$$

f et F désignant des fonctions arbitraires. Si l'on pose

$$(3)\qquad A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0, \qquad A\alpha'^2 + 2B\alpha'\beta' + C\beta'^2 = 0,$$

équations d'où l'on tire les rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, en sorte que l'intégrale générale de (1) prend la forme

$$(4)\qquad z = f(\alpha x + \beta y) + F(\alpha' x + \beta' y).$$

$\alpha : \beta$ et $\alpha' : \beta'$ devant satisfaire à (3) sont racines d'une même équation du second degré

$$A u^2 + 2B u + C = 0,$$

et l'on prendra pour $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\alpha'}{\beta'}$ les racines de cette équation. Lorsque ces racines sont égales, c'est-à-dire quand

$$B^2 - AC = 0,$$

la formule (4) ne contient plus deux fonctions arbitraires,

mais cette formule ne donne plus la solution de la question. L'équation (1) est de la forme

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ba \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

et l'équation (2) transformée de la forme

$$(a\alpha + b\beta)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2(a\alpha + b\beta)(a\alpha' + b\beta') \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + (a\alpha' + b\beta')^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

Si l'on détermine alors α et β au moyen de la relation

$$a\alpha + b\beta = 0,$$

il viendra

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$z = \eta f(\xi) + F(\xi),$$

f et F désignant deux fonctions arbitraires, et par suite

$$z = (\alpha' x + \beta' y) f(\alpha x + \beta y) + F(\alpha x + \beta y),$$

où l'on peut remplacer α et β par b et $-a$.

Cette méthode est applicable à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

que l'on rencontre dans les questions les plus importantes de la Physique mathématique; mais nous intégrerons cette équation à l'aide d'un autre procédé, afin de varier les méthodes.

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

exprime que

$$\frac{\partial z}{\partial x} dy + a^2 \frac{\partial z}{\partial y} dx = d\theta$$

est la différentielle exacte d'une certaine fonction θ de x et y; d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx = dz;$$

de ces deux équations on tire

$$d\theta + a\,dz = (dy + a\,dx)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + a\,\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$d\theta - a\,dz = (dy - a\,dx)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - a\,\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

ce qui prouve que $\theta + az$ est fonction de $y + ax$ et que $\theta - az$ est fonction de $y - ax$ (T. I, p. 167); en appelant alors f et F des fonctions arbitraires, on a

$$\theta + az = f(y + ax),$$
$$\theta - az = \mathrm{F}(y - ax);$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{1}{2a}\left[f(y + ax) - \mathrm{F}(y - ax)\right],$$

formule équivalente à

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires : telle est l'intégrale cherchée.

Remarque. — On voit que, pour intégrer une équation linéaire homogène et à coefficients constants ne renfermant que des dérivées d'un même ordre, telle que

$$\mathrm{A}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathrm{B}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} + \mathrm{C}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \mathrm{D}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0,$$

par exemple, il suffit de poser

$$u = \varphi(x + \alpha y);$$

l'équation à intégrer devient alors, en supprimant le facteur $\varphi'(x + \alpha y)$,

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha^2 + \mathrm{D}\alpha^3 = 0,$$

ce qui fournit trois valeurs de α; on voit donc que, si l'on appelle α_1, α_2, α_3 les racines de cette équation, l'expression

$$u = \varphi_1(x + \alpha_1 y) + \varphi_2(x + \alpha_2 y) + \varphi_3(x + \alpha_3 y)$$

satisfera encore à l'equation proposée, φ_1, φ_2, φ_3 désignant trois fonctions arbitraires que l'on pourra choisir de telle sorte que, pour $y = y_0$, u, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ prennent des valeurs données.

XIX. — Équations de Monge et d'Ampère.

Désignons par z une fonction inconnue de x et y, par p, q, r, s, t les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. Monge, en 1784 (*Histoire de l'Académie des Sciences*), a essayé d'intégrer les équations de la forme

$$Rr + 2Ss + Tt = 0,$$

R, S, T désignant des fonctions de x, y, z, p, q; il y est parvenu dans quelques cas simples. Ampère (*Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] et XVIII[e] Cahier, 1820), modifiant l'analyse de Monge, a étudié les équations plus générales de la forme

$$(1) \qquad Rr + 2Ss + Tt + M(rt - s^2) + N = 0,$$

R, S, T, M, N désignant toujours des fonctions de x, y, z, p, q. Bour a beaucoup éclairci les travaux d'Ampère et de Monge (t. XXII du *Journal de l'École Polytechnique*). Voici une méthode fort simple que M. Bertrand a exposée dans ses Leçons à l'École Polytechnique, et qui permet d'intégrer l'équation (1) dans le cas où elle possède ce que l'on appelle une *intégrale intermédiaire*; c'est d'ailleurs le seul cas dans lequel Monge, Ampère et Bour ont réussi à intégrer cette équation (1).

Nous dirons que

$$(2) \qquad f = a,$$

f désignant une fonction de x, y, z, p, q et a une constante arbitraire, est une *intégrale intermédiaire* de (1) si la valeur la plus générale de z tirée de (2) satisfait à (1).

Supposons qu'une intégrale intermédiaire, telle que (2), existe; on la trouvera comme il suit : imaginons que l'on ait intégré l'équation (1) d'une manière générale; en différentiant cette intégrale générale par rapport à x et y, on aura six équations (A) d'où l'on pourra tirer z, p, q, r, s, t en fonction de x, y, a. Si l'on porte ces valeurs dans (1), cette formule sera identiquement satisfaite, c'est-à-dire satisfaite quels que soient x, y, a et la forme de la fonction arbitraire d'intégration dont dépend z, et que nous supposons contenir trois constantes arbitraires a_1, a_2, a_3 distinctes de a.

Des six équations (A) éliminons les quatre constantes : il restera deux équations d'où l'on pourra tirer r, s en fonction de t, p, q, z, x, y. Si l'on porte leurs valeurs dans (1), on obtiendra encore une identité en t, p, q, z, x, y; en effet, la formule ainsi obtenue sera identique en a, a_1, a_2, a_3, x, y quand on y remplacera t, z, p, q par leurs valeurs; donc elle est actuellement identique, puisque l'on peut choisir les a de manière à faire acquérir à t, z, p, q des valeurs données arbitrairement. Or l'équation (2), différentiée par rapport à x et y, fournit précisément deux des équations obtenues en éliminant les a entre les équations (A); si donc on tire r et s de ces équations pour les porter dans (1), on aura une identité. Posons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z};$$

en différentiant (2), on a

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial p} r + \dfrac{\partial f}{\partial q} s = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial p} s + \dfrac{\partial f}{\partial q} t = 0. \end{cases}$$

Tirant r et s de là pour les porter dans (1), on a un résultat de la forme

$$P + Qt = 0;$$

cette formule étant identique, on doit avoir

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

ou, en remplaçant P et Q par leurs valeurs,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &R\left[\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] \\ &\quad - 2S\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + N\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 - M\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 0, \\ &R\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - 2S\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + T\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 \\ &\quad - M\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial q}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Voilà deux équations auxquelles devra satisfaire la fonction f s'il existe une intégrale intermédiaire.

Si M était nul, on pourrait aussi procéder en éliminant r et t ou s et t entre (1) et (3); il faudrait éliminer s et t, si $\frac{\partial f}{\partial p}$ était nul, et alors f ne contiendrait pas p. M. Bertrand, dans les exemples qu'il traite dans son Cours, élimine r et t.

La question peut être considérée comme résolue, puisque, pour trouver l'intégrale intermédiaire, quand elle existe, il suffit d'intégrer deux équations (4) simultanées du premier ordre à une seule fonction inconnue.

Les équations (4) peuvent se simplifier : en éliminant $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, on trouve

$$\left[M\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + S\frac{\partial f}{\partial p} - R\frac{\partial f}{\partial q}\right]^2 + (RT - MN - S^2)\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 = 0,$$

et, en posant

$$G = S^2 - RT + MN,$$

le système (4) peut être remplacé par

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &M\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - T\frac{\partial f}{\partial p} + (S \pm \sqrt{G})\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \\ &M\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (S \mp \sqrt{G})\frac{\partial f}{\partial p} - R\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \end{aligned}\right.$$

où il ne faut pas oublier de remplacer $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ par $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}$ et par $\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$.

Remarque. — Prenons les équations (5) avec le signe $+$ devant le radical $\sqrt{G}$, soit f_1 une solution commune; prenons-les avec le signe $-$, soit f_2 une solution commune, on aura alors

$$\begin{aligned}
&M\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) - T\frac{\partial f_1}{\partial p} + (S + \sqrt{G})\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0,\\
&M\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + (S - \sqrt{G})\frac{\partial f_1}{\partial p} - R\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0,\\
&M\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) - T\frac{\partial f_2}{\partial p} + (S - \sqrt{G})\frac{\partial f_2}{\partial q} = 0,\\
&M\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + (S + \sqrt{G})\frac{\partial f_2}{\partial p} - R\frac{\partial f_2}{\partial q} = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{\partial f_2}{\partial p}$, $\frac{\partial f_2}{\partial q}$, $-\frac{\partial f_1}{\partial p}$, $-\frac{\partial f_1}{\partial q}$ et ajoutons, nous aurons

$$M\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\frac{\partial f_2}{\partial p} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\frac{\partial f_1}{\partial p} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\frac{\partial f_2}{\partial q} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{\partial f_1}{\partial q}\right] = 0;$$

si donc M n'est pas nul, p et q tirés de $f_1 = a_1$ et de $f_2 = a_2$ feront de $p\,dx + q\,dy$ une différentielle exacte dz, et z sera donné par l'équation aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Appliquons ces considérations à l'équation

$$(a) \qquad rq^2 - 2spq + tp^2 = 0.$$

Supposons qu'il existe une intégrale intermédiaire

$$f = a;$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} = 0,\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} = 0.
\end{aligned}$$

Entre ces équations et (a) éliminons r et t, nous aurons

$$p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}=0,$$

$$q\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-p\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

En vertu de la première équation, f est fonction de $\frac{p}{q}$, x, y, z; en vertu de la seconde, il est fonction de $z-px$, $z-qy$, de p et de q. On satisfera à ces conditions en prenant pour intégrale intermédiaire

$$F\left(z,\frac{p}{q}\right)=a$$

ou en posant

$$p-qf(z)=0.$$

Il reste à intégrer cette équation : pour cela, on intègre les équations

$$dx=\frac{dy}{-f(z)}=\frac{dz}{0},$$

ce qui donne les intégrales

$$z=\text{const.},\qquad y+xf(z)=\text{const.};$$

on en conclut

$$z=F[y+xf(z)]$$

ou encore

$$y+xf(z)=f_1(z)$$

ou encore

$$y\varphi(z)+x\psi(z)=1,$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires; c'est l'équation générale des surfaces réglées ayant pour plan directeur le plan des xy.

XX. — Intégration de l'équation des surfaces développables.

L'équation

(1) $$rt-s^2=0$$

est celle des surfaces développables; pour l'intégrer, nous en chercherons une intégrale intermédiaire; cette intégrale, si elle existe, satisfera aux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

On satisfait à la fois à ces deux équations en prenant F fonction de p et q seuls; ainsi

$$f(p, q) = \text{const.}$$

ou même

(2) $$f(p, q) = 0$$

est une intégrale intermédiaire de l'équation proposée : il ne reste plus qu'à intégrer une équation du premier ordre, ce que l'on sait faire.

XXI. — Imperfections du Calcul intégral. Un moyen d'y remédier.

Les considérations développées dans ce Chapitre contiennent à peu près ce que l'on sait de plus général sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur ou sur les équations simultanées : elles sont évidemment un aveu d'impuissance. Il y aurait un moyen de remédier à cette impuissance; ce moyen, bien imparfait, pourrait rendre et a même rendu déjà de grands services. Il consisterait à former un grand nombre d'équations différentielles en partant de leur intégrale générale choisie arbitrairement : cette intégrale pourrait contenir des fonctions arbitraires; en éliminant ces fonctions arbitraires entre l'équation en question et ses dérivées, on trouverait une équation différentielle, et l'on essayerait de démontrer après coup qu'elle a pour intégrale générale l'équation qui a servi de point de départ.

On aurait de la sorte un catalogue d'équations que l'on

saurait intégrer, et qui pourrait souvent suppléer à l'insuffisance des véritables méthodes de recherche.

Nous allons donner quelques exemples de formation d'équations différentielles.

XXII. — Équation des surfaces gauches à plan directeur.

Les surfaces gauches à plan directeur sont engendrées par une droite

$$z = \gamma, \qquad mx + ny = 1,$$

parallèle à un plan fixe que nous prenons pour plan des xy; l'équation de la surface s'obtiendra en supposant deux relations faisant connaître m et n en fonction de γ; si donc on suppose $m = \varphi(z)$, $n = \psi(z)$, l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad x\,\varphi(z) + y\,\psi(z) = 1.$$

Soient

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

cherchons l'*équation aux dérivées partielles des surfaces* (1), c'est-à-dire une équation entre les dérivées de z qui ne contienne plus de traces des fonctions φ, ψ. A cet effet, différentions (1) par rapport à x et y : nous aurons

$$[x\,\varphi'(z) + y\,\psi'(z)]p + \varphi(z) = 0,$$
$$[x\,\varphi'(z) + y\,\psi'(z)]q + \psi(z) = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad q\,\varphi(z) - p\,\psi(z) = 0.$$

Différentions encore par rapport à x et y : nous aurons

$$[q\,\varphi'(z) - p\,\psi'(z)]p + s\,\varphi(z) - r\,\psi(z) = 0,$$
$$[q\,\varphi'(z) - p\,\psi'(z)]q + t\,\varphi(z) - s\,\psi(z) = 0;$$

en éliminant $q\,\varphi'(z) - p\,\psi'(z)$, on a

$$[s\,\varphi(z) - r\,\psi(z)]q - [t\,\varphi(z) - s\,\psi(z)]p = 0$$

et, en faisant usage de (2) pour éliminer φ et ψ,

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0 :$$

telle est l'équation des surfaces réglées dont le plan directeur est le plan des xy. On peut parvenir à cette équation d'une autre manière. Si l'on différentie (1) en laissant z constant, on a

$$\varphi(z)dx + \psi(z)dy = 0;$$

mais alors on a

$$(3)\qquad 0 = p\,dx + q\,dy.$$

L'élimination de dx et de dy donne

$$(4)\qquad q\varphi(z) - p\psi(z) = 0;$$

différentiant encore en laissant z constant, on a

$$(s\,dx + t\,dy)\varphi(z) - (r\,dx + s\,dy)\psi(z) = 0;$$

en éliminant de là $dx : dy$ et $\varphi(x) : \psi(z)$ au moyen de (3) et (4), on retrouve l'équation

$$(5)\qquad rq^2 - 2spq + tp^2 = 0.$$

Il est facile de démontrer que l'intégrale générale de cette équation (5) est fournie par l'équation (1). On tire, en effet, de (1)

$$x = \frac{1}{\varphi(z)} - y\,\frac{\psi(z)}{\varphi(z)};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0,$$

qui serait sous une autre forme l'équation différentielle de la surface (1). Il est donc indiqué de faire un changement de variable, et, en effet, quand on prend x pour fonction, y et z pour variables indépendantes. l'équation (5) se transforme

dans (6) qui, intégrée deux fois, donne

$$x = y\varpi(z) + \Pi(z),$$

$\varpi(z)$ et $\Pi(z)$ désignant deux fonctions arbitraires. Cette formule représente évidemment la même surface que (1).

Si l'on ne voulait pas prendre le plan des xy pour plan directeur, on mettrait les équations de la génératrice sous la forme

$$ax + by + cz = h,$$

$$mx + ny = 1;$$

a, b, c seraient alors des constantes données et m, n seraient fonctions de h; l'équation de la surface serait

$$x\varphi(ax + by + cz) + y\psi(ax + by + cz) = 1.$$

En différentiant cette équation et laissant $ax + by + cz$ constant, on a

$$(7) \qquad \varphi\, dx + \psi\, dy = 0,$$

$$(8) \qquad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

$$(9) \qquad p\,dx + q\,dy - dz = 0;$$

l'élimination de dx, dy, dz donne

$$a\psi - b\varphi + c(p\psi - q\varphi) = 0.$$

En différentiant encore et laissant $ax + by + cz$ constant, on a

$$\psi(r\,dx + s\,dy) - \varphi(s\,dx + t\,dy) = 0$$

ou, en éliminant φ et ψ à l'aide de (7),

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0;$$

enfin, en éliminant dx, dy, dz à l'aide de (8) et (9), on a

$$(cp + a)^2 r^2 - 2s(a + cp)(b + cq) + t(b + cq)^2 = 0.$$

XXIII. — Surfaces gauches à directrice rectiligne.

Nous prendrons l'axe des z pour directrice : les équations de la génératrice seront

$$mx + ny = 0,$$

$$ax + by + cz + h = 0;$$

la dernière peut être résolue par rapport à z et mise sous la forme

$$z = \alpha x + \beta,$$

en tenant compte de la première; α et β sont des fonctions de $\frac{m}{n}$ ou de $\frac{y}{x}$, en sorte que l'équation des surfaces réglées ayant l'axe des z pour directrice est

$$(1) \qquad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires. Pour trouver l'équation aux dérivées partielles provenant de l'élimination de φ et ψ, différentions cette équation en laissant $\frac{y}{x}$ constant : nous aurons

$$(2) \qquad p\,dx + q\,dy = \psi\left(\frac{y}{x}\right)dx, \qquad y\,dx - x\,dy = 0;$$

l'élimination de dx et de dy donne

$$(3) \qquad px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

différentions encore dans les mêmes hypothèses : nous aurons

$$(4) \quad p\,dx + q\,dy + x(r\,dx + s\,dy) + y(s\,dx + t\,dy) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx.$$

En éliminant dx, dy, $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ entre (2), (3), (4), on trouve

$$(5) \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0 :$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces gauches à directrice rectiligne. Pour démontrer que son intégrale générale est donnée par la formule (1), il suffit de changer de variable, et de prendre pour nouvelles variables x et $\frac{y}{x}$; elle devient alors

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

et, par suite, on en tire

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

mais un pareil changement de variable ne peut être indiqué que parce que l'on soupçonne la forme de l'intégrale générale de l'équation (5).

XXIV. — Sur les fonctions homogènes.

On sait qu'une fonction homogène u de degré m des variables x, y, z satisfait à l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & \quad + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + 2zx \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = m(m-1)u; \end{aligned}\right.$$

quelle est l'intégrale générale de cette équation?

Pour répondre à cette question, posons

$$(2)\qquad v = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} - mu;$$

on déduira de là, en vertu de (1),

$$\begin{aligned} & x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} \\ & \quad = m(m-1)u - (m-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = -(m-1)v:$$

la fonction v est donc une fonction homogène de degré $-(m-1)$ et la fonction u sera donnée par l'intégration de (2). Comme un nombre quelconque peut se mettre sous la forme $m(m-1)$, on voit que l'on pourra intégrer l'équation (1) quand le second membre sera remplacé par o ou par au, a désignant une constante quelconque.

EXERCICES ET NOTES.

Dans tous les exercices suivants, z sera une fonction de x et de y, et l'on aura $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; φ et ψ sont des fonctions arbitraires.

1. $$pq = zs$$

a pour intégrale

$$z = \varphi(x)\psi(y).$$

2. $$s = f(z)pq$$

a pour intégrale

$$\int e^{-\int f(z)dz} dz = \varphi(x) + \psi(y).$$

(Hoppe, *Archives de Grunert*, 1878.)

3. $$p = q + sy$$

a pour intégrale

$$z = \varphi(x) + y\varphi'(x).$$

4. $$z = s + qy$$

a pour intégrale

$$z = \varphi'(x) + y\varphi(x).$$

5. $$sp - rq = 0$$

a pour intégrale

$$z = \varphi[x + f(y)].$$

6. $$rx^2 + 2sxy + ty^2 + px + qy = n^2 z$$

a pour intégrale

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y^n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7. $$s(y^2 - x^2) + (r - t)xy + py - qx = 0$$

a pour intégrale

$$z = \varphi(x^2 + y^2) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

8. $$s(x^2 + y^2) - (r + t)xy - py - qx = 0$$

a pour intégrale

$$z = \varphi(x^2 + y^2) + \psi(xy).$$

9. $$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

est l'équation des surfaces réglées à plan directeur (le plan des xy).

10. $$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

est l'équation des surfaces réglées dont la génératrice rencontre l'axe des z.

11. $$px + qy = z + sxy$$

a pour intégrale

$$z = x\varphi(y) + y\psi(x).$$

12. $$p^2 t - 2spq + q^2 r - \frac{p}{y} - \frac{q}{x} = 0$$

a pour intégrale

$$x^2\varphi(z) + y^2\psi(z) = 1.$$

13. $$rqx + s(qy - px) - tpy = 0$$

a pour intégrale

$$\psi[x\varphi(z), y\varphi(z)] = 0.$$

14. Désignons par le symbole $\Delta(\varphi)$ l'expression

$$\Delta(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} - \frac{m+1}{x+z}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{m+1}{x+y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (m+1)\left[\frac{m+1}{(x+y)(x+z)} + \frac{m}{(y-z)^2}\right]\varphi$$

et par $\Delta^2(\varphi)$, $\Delta^3(\varphi)$, ... les expressions $\Delta[\Delta(\varphi)]$, $\Delta[\Delta^2(\varphi)]$, ...; l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + m(m+1)\left[\frac{1}{(y-z)^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{(x+z)^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0$$

a pour intégrale générale

$$u = \Delta^m(\varphi) + \Delta^m(\chi) + \Delta^m(\psi),$$

φ, χ, ψ désignant des fonctions arbitraires de y et z.

(MOUTARD.)

CHAPITRE V.

DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES.

I. — Définitions.

On appelle équations aux *différences finies* celles qui ont lieu entre une ou plusieurs fonctions inconnues d'une même variable x et leurs différences finies.

Une équation aux différences finies est d'ordre n, quand l'ordre de la plus haute différence qu'elle contient est précisément n.

On peut toujours supposer la différence Δx de la variable x égale à un : en effet, si elle était égale à h, en changeant x en $\frac{z}{h}$, l'accroissement Δz de z, correspondant à l'accroissement $\Delta x = h$ de x, serait égal à un.

Une équation aux différences finies peut être envisagée à deux points de vue différents : considérons, pour fixer les idées, l'équation

$$\Delta y = xy;$$

on peut se proposer de trouver une fonction $y = f(x)$ continue, telle que l'on ait, quel que soit x,

$$f(x+1) - f(x) = xf(x),$$

ou bien, on peut simplement se proposer de trouver une fonction numérique, telle que pour des valeurs de x en progression arithmétique, par exemple

$$\ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n \ldots,$$

on ait

$$f(x+1)-f(x)=xf(x).$$

Nous nous placerons successivement à ces deux points de vue. Nous appellerons *intégrales* les solutions des équations aux différences finies.

II. — Sur l'existence des intégrales.

Considérons un système quelconque d'équations aux différences entre les fonctions y, z, u, v. On peut toujours ramener ce système à un nouveau système du premier ordre; il suffit pour cela, si, par exemple, les équations sont du second ordre, de poser

$$\Delta y = y', \qquad \Delta z = z', \qquad \ldots, \qquad \Delta v = v';$$

les différences secondes $\Delta^2 y$, $\Delta^2 z$, ... seront alors remplacées par des différences premières $\Delta y'$, $\Delta z'$, ...

Ceci posé, considérons un système de n équations aux différences entre n fonctions inconnues $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n)}$ et la variable x, du premier ordre; en les résolvant par rapport à $\Delta y^{(1)}$, $\Delta y^{(2)}$, ..., elles pourront se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta y^{(1)} = f^{(1)}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots), \\ \Delta y^{(2)} = f^{(2)}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donnons-nous arbitrairement $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots$ pour $x = x_0$, et soient $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$, ... ces valeurs arbitraires : si l'on suppose $\Delta x = 1$ et si l'on désigne par $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$, ... les valeurs de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... pour $x = x_0 + 1 = x_1$, ..., les équations (1) donneront

$$y_1^{(1)} - y_0^{(1)} = f^{(1)}(x_0, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et feront connaître $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$, ... ; elles donneront aussi

$$y_2^{(1)} - y_1^{(1)} = f^{(1)}(x_1, y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots)$$

et feront connaître $y_2^{(1)}$, $y_2^{(2)}$, ..., c'est-à-dire toute la série

des valeurs des inconnues correspondant aux valeurs x_0, $x_0 \pm 1$, $x_0 \pm 2$, ... de x.

Donc :

1° Si l'on désire seulement des valeurs de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... correspondant à des valeurs de x en progression arithmétique, les équations (1) admettront, en général, une solution renfermant les arbitraires $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$, ...

2° Si l'on désire des fonctions $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... de x satisfaisant à (1), quel que soit x, on pourra se donner arbitrairement $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... pour les valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + 1$; les autres valeurs s'en déduiront.

Quand on aura résolu les équations (1) en se plaçant au premier point de vue, il sera facile de les résoudre en se plaçant au second : en effet, on pourra désigner par $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$, non plus les valeurs de $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., pour $x = x_0$, mais bien des fonctions arbitraires entre les limites x_0 et $x_0 + 1$; $y^{(1)}$, par exemple, sera alors de la forme

$$F[x, \varpi_1(x'), \varpi_2(x'), \ldots],$$

x' étant égal à $x - 1$ si x est compris entre $x_0 + 1$ et $x_0 + 2$, à $x - 2$ si x est compris entre $x_0 + 2$ et $x_0 + 3$, ...: ceci revient à dire que $y^{(1)}$ est de la forme

$$F[x, \varpi_1(x), \varpi_2(x), \ldots],$$

ϖ_1, ϖ_2, ... désignant des fonctions périodiques arbitraires ayant pour période commune l'unité.

Ainsi, en se plaçant au second point de vue, on obtient les mêmes résultats qu'en se plaçant au premier; seulement les constantes arbitraires de l'intégrale sont remplacées par des fonctions périodiques arbitraires.

Nous raisonnerons dorénavant en nous plaçant au premier point de vue.

III. — Intégrales directes et indirectes.

Quand on cherche à intégrer un système d'équations aux différences finies, par la méthode indiquée au paragraphe

précédent, il se présente le plus souvent une singularité sur laquelle nous allons maintenant nous arrêter. Nous avons supposé tacitement que les quantités $\Delta y^{(1)}$, $\Delta y^{(2)}$, ... étaient bien déterminées, ce qui n'aura lieu, en général, que si $\Delta y^{(1)}$, $\Delta y^{(2)}$, ... entrent au premier degré dans les équations proposées. Il importe d'examiner le cas où $\Delta y^{(1)}$, $\Delta y^{(2)}$, ... seraient fournies par des équations quelconques. Pour ne pas compliquer les choses, nous nous bornerons à considérer l'équation

$$(\Delta y)^2 = y,$$

d'où l'on tire

$$\Delta y = \pm \sqrt{y};$$

en appliquant la méthode exposée tout à l'heure, on a, en choisissant arbitrairement y_0,

$$\Delta y_0 = \pm \sqrt{y_0}, \qquad y_1 = y_0 \pm \sqrt{y_0},$$

et y_1 a deux valeurs; on a ensuite

$$\Delta y_1 = \pm \sqrt{y_1}, \qquad y_2 = y_0 \pm \sqrt{y_0} \pm \sqrt{y_0 \pm \sqrt{y_0}},$$

et y_2 a quatre valeurs; y_3 en aurait huit, et ainsi de suite. La fonction y_x est donc mal déterminée. Cette remarque était nécessaire pour faire comprendre les résultats auxquels nous allons arriver et faire prévoir toutes les difficultés que l'on doit rencontrer dans l'intégration des équations aux différences finies.

Supposons que l'on ait trouvé une solution de l'équation

$$f(\Delta y, y, x) = 0, \tag{1}$$

et que cette solution renferme une constante arbitraire a : soit

$$\varphi(x, y, a) = 0 \tag{2}$$

cette solution; on aura

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, a) = 0, \tag{3}$$

et, en éliminant a entre (2) et (3), on devra trouver l'équa-

tion (1), puisque Δy tiré de (2) ou de (2) et (3) doit avoir la même valeur que Δy tiré de (1); si donc, au lieu de supposer a constant, on le suppose fonction de x, mais tel que

$$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, a+\Delta a) - \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, a) = 0,$$

ou simplement tel que, quels que soient x et y, on ait

$$\varphi(x, y, a+\Delta a) - \varphi(x, y, a) = 0,$$

l'équation (2) sera encore une intégrale de (1). Or l'équation précédente, qui détermine a, est elle-même aux différences et comporte une grande indétermination. On ne pourra donc pas dire que (2) est l'intégrale générale de (1). On a improprement appelé intégrales *indirectes* celles que l'on obtient ainsi, et, en effet, si l'on partait d'une intégrale indirecte, on pourrait fort bien retomber sur l'intégrale directe en lui appliquant le procédé dont nous venons de parler.

IV. — Intégrales aux différences.

L'équation aux différences la plus simple est de la forme

$$(1) \qquad \Delta y = f(x)\Delta x,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée de x, et il est naturel de représenter sa solution par la notation $\sum f(x)\Delta x$; d'ailleurs, on a, en faisant $y = y_0$ pour $x = x_0$,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f(x_0)\Delta x,$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x$$

et, en général,

$$y_x = y_0 + \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x)],$$

en sorte que

$$y_x = y_0 + \sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x.$$

Le problème qui consiste à intégrer l'équation (1) ou à cal-

culer une fonction, connaissant sa différence, n'est donc autre que celui de la sommation des suites : nous avons donné dans le courant de cet Ouvrage plusieurs exemples de sommations de suites; nous n'avons rien de particulier à ajouter ici sur ce sujet.

V. — Intégration des équations linéaires.

Considérons d'abord une équation linéaire et du premier ordre. Une pareille équation est de la forme

$$\Delta y + P y = Q;$$

on l'intègre en posant

$$y = uv, \qquad \Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v;$$

elle devient alors

$$u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v + P uv = Q.$$

Décomposons-la dans les deux suivantes

$$u\Delta v + P uv = 0,$$

$$v\Delta u + \Delta u\Delta v = Q,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \Delta v = -P v, \qquad \Delta u = \frac{Q}{v + \Delta v};$$

il reste à calculer v, et une sommation donnera

$$u = \sum \frac{Q}{v + \Delta v}.$$

Pour intégrer (1), nous poserons $v = e^t$: nous aurons alors

$$e^t(e^{\Delta t} - 1) = -P e^t,$$

d'où l'on tire

$$e^{\Delta t} = 1 - P, \qquad \Delta t = \log(1 - P)$$

et, par suite,

$$t = \sum \log(1 - P), \qquad v = e^{\Sigma \log(1-P)} = \Pi(1 - P).$$

La question est ainsi résolue.

VI. — Méthode des fonctions génératrices.

Laplace dit que $f(t)$ est la fonction génératrice de $\varphi(x)$ quand $\varphi(x)$ est le coefficient de t^x dans le développement de $f(t)$ suivant les puissances de t. De même $f(t_1, t_2, \ldots)$ sera la fonction génératrice de $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$, si φ est le coefficient de $t_1^{x_1}, t_2^{x_2}, \ldots$ dans le développement de $f(t_1, t_2, \ldots)$ suivant les puissances de $t_1, t_2, \ldots$. Nous allons montrer sur un exemple l'emploi de la méthode des fonctions génératrices pour l'intégration des équations aux différences.

Considérons l'équation suivante, où n est variable indépendante,

$$(1)\qquad (2n+1)xy_n-(n+1)y_{n+1}-ny_{n-1}=0,$$

et appelons f la fonction génératrice de y_n, en sorte que

$$f=y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_nt^n+\ldots,$$

on aura

$$t\frac{dft}{dt}=y_0t+2y_1t^2+3y_2t^3+\ldots+ny_{n-1}t^n+\ldots,$$

$$\frac{df}{dt}=y_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n+1)y_{n+1}t^n+\ldots,$$

$$2t\frac{df}{dt}x=2ty_1x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2nxy_nt^n+\ldots,$$

$$xf=y_0x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+xy_nt^n+\ldots.$$

On tire de ces formules

$$2tx\frac{df}{dt}+xf-t\frac{dft}{dt}-\frac{df}{dt}=xy_0-y_0t,$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \frac{df}{dt}(1-2tx+t^2)-(x-t)f=-xy_0+y_0t.$$

On peut supposer $y_0=0$; en appelant alors c une constante, on trouve

$$f=\frac{c}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

et, en achevant l'intégration de (2), on aurait une fonction génératrice plus générale; pour avoir y_n, il suffira de développer f suivant les puissances de t et de prendre le coefficient de t^n. On voit que les fonctions X_n de Legendre sont des intégrales de l'équation proposée.

Lorsque l'équation proposée est homogène et à coefficients constants, on peut la présenter sous la forme

$$(3) \qquad A_0 y_n + A_1 y_{n+1} + \ldots + A_m y_{m+n} = 0;$$

la fonction génératrice de y_n est alors une fonction rationnelle; car la recherche de y_n revient à la recherche du terme général d'une série récurrente dont l'échelle de relation est A_0, A_1, ..., A_m, problème que l'on a appris à résoudre au Chapitre II du Ier Volume de cet Ouvrage, sans même avoir recours aux procédés du Calcul différentiel.

On peut encore intégrer l'équation (3), en posant

$$y = e^{\alpha n};$$

l'équation (3) devient alors

$$A_0 + A_1 e^{\alpha} + \ldots + A_m e^{m\alpha} = 0;$$

cette équation fait connaître m valeurs e^{α_1}, e^{α_2}, ... de e^{α}, et, en appelant c_1, c_2, ... des constantes, on a, pour l'expression générale de l'intégrale cherchée,

$$c_1 e^{\alpha_1 n} + c_2 e^{\alpha_2 n} + \ldots.$$

La plupart des artifices qui réussissent pour les équations différentielles linéaires réussissent aussi quand on les applique aux équations aux différences linéaires, ce qui nous dispense d'insister davantage sur ce sujet.

Disons seulement en terminant que, lorsque l'on connaît la solution générale y de l'équation

$$A_0 y + A_1 \Delta y + \ldots + A_m \Delta^m y = 0,$$

et une solution particulière z de

$$A_0 y + A_1 \Delta y + \ldots + A_m \Delta^m y = f(x),$$

la solution la plus générale de cette dernière équation est $y+z$.

Disons enfin que la méthode de la variation des constantes peut aussi servir à intégrer la dernière équation.

VII. — Équations aux différences partielles.

On rencontre souvent des équations dans lesquelles les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables, et qui renferment, outre ces fonctions et leurs variables, les différences partielles (finies) de ces fonctions relatives aux variables. Le calcul des probabilités fournit de nombreux exemples de pareilles équations : on leur donne le nom d'équations aux *différences partielles*.

Considérons un système de n équations aux différences partielles du premier ordre, c'est-à-dire dans lesquelles les différences des fonctions inconnues ne dépassent pas le premier ordre : soient $u, v, \ldots, w$ les fonctions inconnues, $x, y, z, \ldots$ les variables; $\Delta_x u, \Delta_y u \ldots$ désigneront les différences de u relatives respectivement à x en laissant $y, z, \ldots$ constants, à y en laissant x et $z, \ldots$ constants, etc.

On peut supposer que le système donné ait été mis sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta_x u = f_1(u, v, \ldots; x, y, z, \ldots; \Delta_y u \ldots), \\ \Delta_x v = f_2(u, v, \ldots; x, y, z, \ldots; \Delta_y u \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les équations du système ayant été résolues par rapport à $\Delta_x u, \Delta_x v, \ldots, \Delta_x w$. Si alors on se donne, pour $x=x_0$, $y=y_0, \ldots$ les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$ de $u, v, \ldots, w$ et de leurs différences relatives à $y, z, \ldots$, les équations (1) feront connaître $\Delta u_0, \Delta v_0, \ldots$, et par suite $u_1, v_1, \ldots$ et leurs différences relatives à $y, z \ldots$; quand on aura calculé ces quantités, les mêmes équations (1) feront connaître u_2, $v_2, \ldots$, et ainsi de suite.

Si l'on se propose de calculer $u, v, \ldots, w$ seulement pour

des valeurs entières de $x, y, z, \ldots$, on voit que la solution renfermera les arbitraires $u_0, v_0, \ldots, w_0$ et $\Delta_y u_0, \Delta_y v_0, \ldots,$ $\Delta_z u_0, \Delta_z v_0 \ldots$. Si l'on veut satisfaire aux équations proposées, quels que soient $x, y, z, \ldots$, il est clair que les solutions renfermeront des fonctions arbitraires entre des limites de x différant entre elles de Δx, fonctions périodiques par rapport à la variable x admettant la période Δx. On voit que l'indétermination serait encore plus grande si l'on avait à considérer les équations d'un ordre supérieur au premier.

Il est clair qu'indépendamment de la solution générale mise en évidence, des solutions singulières peuvent se présenter comme dans le cas des équations aux différences ordinaires.

VIII. — Équations linéaires.

Lagrange (t. IV de ses *Œuvres*) et Laplace (*Calcul des Probabilités*) ont donné divers moyens pour intégrer les équations linéaires; ces moyens ne permettent pas toujours de bien déterminer dans chaque cas particulier les fonctions arbitraires de manière à satisfaire aux problèmes que l'on veut résoudre. La méthode que Cauchy a indiquée pour les équations aux dérivées partielles semble s'appliquer assez bien aux équations aux différences partielles. Bornons-nous à l'équation très simple

$$pu_{xy} + qu_{x,y+1} - u_{x+1,y+1} = 0, \tag{1}$$

où p et q sont constants et à laquelle Lagrange a été conduit en cherchant la solution d'une question tirée du *Calcul des Probabilités*.

Lagrange pose

$$u_{xy} = a\alpha^x \beta^y,$$

et il trouve que, quels que soient α et a, pourvu qu'ils soient constants, on satisfait à l'équation en prenant $\beta = \frac{p}{\alpha - q}$; mais il n'eût sans doute pas pu résoudre la question en assu-

jettissant $u_{x,y}$ à prendre pour $y=0$ une valeur donnée fonction de x.

Si nous posons, au contraire,

$$u_{x,y}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,y)e^{\alpha\sqrt{-1}(\xi-x)}\,d\alpha\,d\xi,$$

l'équation (1) sera satisfaite en posant

$$pf(\xi,y)+qf(\xi,y+1)-e^{-\alpha\sqrt{-1}}f(\xi,y+1)=0;$$

cette équation est aux différences ordinaires : on y satisfait en prenant

$$f(\xi,y)=A\left(\frac{p}{e^{-\alpha\sqrt{-1}}-q}\right)^y,$$

A étant une fonction arbitraire de ξ, et l'on a alors

$$u_{x,y}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\left(\frac{p}{e^{-\alpha\sqrt{-1}}-q}\right)^y e^{\alpha\sqrt{-1}(\xi-x)}\,d\alpha\,d\xi,$$

et, pour $y=0$, on aura $u_{x,y}=A(x)$. L'emploi des séries aurait également réussi à donner la solution de la question.

La meilleure manière d'étudier la question de l'intégration des équations aux différences partielles est de lire avec soin le *Calcul des Probabilités* de Laplace ; le Calcul des Probabilités fait surgir à chaque instant des questions qui se réduisent à l'intégration d'équations aux différences finies, ordinaires ou partielles.

On peut aussi consulter un Mémoire de Cauchy, intitulé : *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de Physique mathématique,* 1827.

IX. — Équations aux différences mêlées.

On rencontre, en Physique mathématique, des équations dans lesquelles les inconnues sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables : ces équations contiennent, outre ces

fonctions et leurs variables, à la fois les différences et les dérivées des fonctions inconnues; on a donné à ces équations le nom d'équations aux *différences mêlées*.

Pour intégrer de pareilles équations, ce qu'il y a de mieux à faire est souvent de développer les différences par la formule de Taylor; ces équations deviennent alors différentielles d'ordre infini; on les traite alors comme on peut : c'est avouer que l'on ne sait rien ou presque rien sur ces équations. Cependant, quand elles sont linéaires, on parvient à en trouver des solutions, en leur appliquant les méthodes qui ont déjà réussi pour les équations aux différences finies et aux dérivées partielles.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A\,\Delta u;$$

Δu désignant la différence totale de u relative aux variables x, y, et A désignant une constante, on posera

$$(2) \qquad u = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int\int e^{\sqrt{-1}[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}\varphi\, d\alpha\, d\xi\, d\beta\, d\eta,$$

φ désignant une fonction de t, ξ et η; si l'on porte cette valeur dans (1), on a

$$\int\int\int\int e^{\sqrt{-1}[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}\left[A\,\varphi\left(e^{\sqrt{-1}(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)}-1\right)-\frac{d\varphi}{dt}\right]d\alpha\, d\xi\, d\beta\, d\eta = 0,$$

en sorte que l'on satisfera à (1) en déterminant φ par l'équation

$$A\,\varphi\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

ω désignant $e^{\sqrt{-1}(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)}-1$; si alors on intègre cette équation de telle sorte que pour $t=0$ on ait $\varphi = F(\xi, \eta)$, en vertu de la formule de Fourier, l'équation (2) donnera une valeur de u égale à $F(x, y)$ pour $t=0$ et de plus satisfaisant

à l'équation (1). Il est clair que l'on aurait pu essayer de satisfaire à (1), en la mettant sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \ldots\right)$$

et en l'intégrant comme une équation aux dérivées partielles d'ordre fini.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES.

I. — Préliminaires.

On a donné le nom d'*équations fonctionnelles* à des équations qui expriment une propriété d'une ou de plusieurs fonctions qu'il s'agit alors de déterminer : telle est, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y),$$

dans laquelle φ est une fonction dont il faut déterminer la forme. Il est clair qu'il est tout à fait impossible de donner des règles générales pour la résolution de pareilles équations, et tout ce que nous pouvons faire à leur égard, c'est de faire un choix d'exemples et de les traiter. D'ailleurs le sujet que nous allons entamer n'est pas nouveau pour le lecteur, et l'équation (1), par exemple, est résolue dans un certain nombre d'Ouvrages d'Algèbre. Le problème qui a pour but de trouver une fonction φ satisfaisant aux équations

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x), \varphi(x+\varpi)=\varphi(x),$$

qui définissent les fonctions doublement périodiques, a été traité tout au long dans notre IVe volume.

II. — Exemples d'équations fonctionnelles.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y),$$

et proposons-nous de déterminer la fonction φ qui satisfait à cette formule, quels que soient x et y.

A cet effet, différentions (1) successivement par rapport à x et y : nous aurons

$$\varphi'(x+y) = \varphi'(x)\varphi(y),$$
$$\varphi'(x+y) = \varphi(x)\varphi'(y);$$

on en conclut

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Cette formule ayant lieu, quels que soient x et y, on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a,$$

a désignant une constante, et, par suite, à une constante près,

$$\log \varphi(x) = ax,$$
$$\varphi(x) = e^{ax}.$$

Notre raisonnement suppose $\varphi(x)$ continue, et nous n'avons trouvé que les fonctions continues possédant une dérivée satisfaisant à (1).

La même méthode s'applique aux équations

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \ldots,$$

Considérons les deux équations simultanées

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) - \psi(x)\psi(y), \\ \psi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \psi(x)\varphi(y), \end{cases}$$

et proposons-nous de trouver les fonctions continues φ et ψ qui rendent ces formules identiques en x et en y.

A cet effet, multiplions la seconde par $\sqrt{-1}$ et ajoutons-la à la première : nous aurons

$$\varphi(x+y) + \sqrt{-1}\,\psi(x+y) = [\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)][\varphi(y) + \sqrt{-1}\,\psi(y)],$$

et, en posant

$$\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x) = \Pi(x),$$

il viendra

$$\Pi(x+y)=\Pi(x)\Pi(y);$$

on en conclut

$$\Pi(x)=e^{ax}$$

ou

$$\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\psi(x)=e^{ax},$$

a désignant une constante; on aurait de même, en appelant b une autre constante,

$$\varphi(x)-\sqrt{-1}\,\psi(x)=e^{bx},$$

d'où

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{bx}),$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{ax}-e^{bx}),$$

formules qui donnent $\varphi(x)=\cos x$, $\psi(x)=\sin x$, quand on prend $a=\sqrt{-1}$, $b=-\sqrt{-1}$.

Plus généralement, *soit $f(x, y)$ une fonction donnée de x et y : proposons-nous de trouver une fonction ψ, telle que l'on ait*

$$(a)\qquad \psi[f(x,y)]=\psi(x)+\psi(y).$$

Posons, pour abréger, $f(x, y)=r$: on devra avoir

$$\psi(r)=\psi(x)+\psi(y),$$

et alors, en différentiant successivement par rapport à x et à y, on a

$$\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\psi'(x),$$

$$\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial y}=\psi'(y);$$

d'où l'on tire

$$\psi'(x)\frac{\partial r}{\partial y}-\psi'(y)\frac{\partial r}{\partial x}=0$$

ou

$$\psi'(x)=\psi'(y)\frac{\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)}$$

et

$$(b) \qquad \psi(x) = \psi'(y) \int \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)} dx;$$

pour que la fonction ψ existe, il faudra qu'après avoir effectué les opérations dans le second membre, y disparaisse. S'il n'est pas possible de disposer de la constante d'intégration, de telle sorte que y disparaisse, l'équation (a) est impossible. Pour bien faire comprendre cette méthode, supposons

$$f(x, y) = xy;$$

l'équation (b) donnera

$$\psi(x) = \psi'(y) \int \frac{y}{x} dx = y\,\psi'(y) \log cx,$$

c désignant une constante ou une fonction de y; y doit disparaître de ce second membre : cela ne peut se faire que si $y\,\psi'(y)$ et c sont indépendants de y. Or, en posant

$$y\,\psi'(y) = \text{const.} = a,$$

on en déduit

$$\psi(y) = a \log c'y$$

et, par suite,

$$\psi(x) = a \log cx.$$

III. — Problème résolu par Abel.

Trouver des fonctions φ, ψ, f, telles que l'on ait

$$(1) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \psi[xf(y) + yf(x)].$$

Posons

$$(2) \qquad xf(y) + yf(x) = r,$$

l'équation proposée devient

$$(3) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \psi(r)$$

et, en différentiant par rapport à x et à y,

$$\varphi'(x) = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \varphi'(y) = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial y}$$

et, par suite, en éliminant $\psi'(r)$,

$$\varphi'(x)\frac{\partial r}{\partial y} - \varphi'(y)\frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

ou, en remplaçant r par sa valeur (2),

$$(4) \qquad \varphi'(x)[xf'(y)+f(x)] = \varphi'(y)[yf'(x)+f(y)].$$

Cette formule, devant être identique, subsiste pour $y = 0$ et donne

$$\varphi'(x)[xf'(0)+f(x)] = \varphi'(0)f(0),$$
$$\varphi'(y)[yf'(0)+f(y)] = \varphi'(0)f(0);$$

d'où l'on tire

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{\varphi'(0)f(0)}{xf'(0)+f(x)}, \\ \varphi'(y) = \dfrac{\varphi'(0)f(0)}{yf'(0)+f(y)}; \end{cases}$$

portant ces valeurs dans (4), on a

$$[yf'(0)+f(y)][xf'(y)+f(x)] = [xf'(0)+f(x)][yf'(x)+f(y)],$$

équation qui ne renferme plus que la fonction f. Si l'on effectue les calculs, on trouve, en divisant par $xyf'(0)$,

$$f'(y) + \frac{f(y)f'(y)}{yf'(0)} - \frac{f(y)}{y} = f'(x) + \frac{f(x)f'(x)}{xf'(0)} - \frac{f(x)}{x};$$

chacun des membres de cette formule est alors constant et, en appelant a sa valeur, on a

$$xf'(x)f'(0) + f(x)f'(x) - f'(0)f(x) = axf'(0),$$

équation différentielle qui détermine $f(x)$; remplaçant $af'(0)$ par α, $f'(0)$ par β et $f(x)$ par y, elle devient

$$\frac{dy}{dx}(\beta x + y) - \beta y - \alpha x = 0.$$

Pour intégrer cette équation homogène, on pose

$$y = zx;$$

il vient alors

$$x\frac{dz}{dx}(\beta + z) + z^2 - \alpha = 0$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz(\beta + z)}{\alpha - z^2};$$

cette équation fait connaître $z = \frac{f(x)}{x}$; on en déduit $\varphi'(x)$ au moyen de (5) et par suite ψ.

IV. — Autre équation résolue par Abel.

L'équation fonctionnelle

(1) $$\varphi(x) + 1 = \varphi[f(x)],$$

dans laquelle $f(x)$ est de forme donnée et dans laquelle $\varphi(x)$ est à déterminer, a, comme nous le verrons, une grande importance dans la théorie qui nous occupe. Abel propose de la résoudre comme il suit (¹) : il pose

(2) $$x = \psi(y), \qquad f(x) = \psi(y + 1);$$

l'équation (1) devient alors

$$\varphi[\psi(y)] + 1 = \varphi[\psi(y + 1)];$$

on a donc

$$\Delta\varphi[\psi(y)] = 1, \qquad (\Delta y = 1)$$

et, par suite,

$$\varphi[\psi(y)] = y + \chi(y),$$

$\chi(y)$ désignant une fonction périodique ayant pour période 1; cette équation revient à la suivante·

$$\varphi(x) = \psi_{-1}(x) + \chi[\psi_{-1}(x)],$$

$\psi_{-1}(x)$ désignant la fonction inverse de $\psi(x)$, qu'il s'agit de

(¹) Il serait intéressant de savoir à la suite de quelles recherches Abel a été conduit à la considération de cette équation.

calculer; or les équations (2) donnent

$$\psi(y+1)=f[\psi(y)].$$

C'est une équation aux différences, qu'il faudra intégrer pour avoir $\psi(y)$ et par suite $\varphi(x)$.

Si le problème en question n'est pas ainsi complètement résolu, au moins voit-on qu'il admet une et même une infinité de solutions, puisqu'il est ramené à une équation aux différences, dans laquelle la différence de la fonction inconnue est donnée sans ambiguïté.

V. — Problème de Babbage.

Soient, pour abréger,

$$\varphi_2(x)=\varphi[\varphi(x)], \qquad \varphi_3(x)=\varphi[\varphi_2(x)], \qquad \ldots,$$

$$\varphi_n(x)=\varphi[\varphi_{n-1}(x)];$$

on propose de déterminer la fonction φ, de telle sorte que l'on ait

$$(1) \qquad \varphi_n(x)=x.$$

Premier cas. — Si $n=1$, on a

$$\varphi(x)=x,$$

et la solution de l'équation (1) est précisément la variable x elle-même.

Deuxième cas. — Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation

$$\varphi_2(x)=x.$$

On devra avoir

$$\varphi_3(x)=\varphi(x), \qquad \varphi_4(x)=\varphi_2(x)=x, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$x=\varphi_2(x)=\varphi_4(x)=\varphi_6(x)=\ldots,$$

$$\varphi(x)=\varphi_3(x)=\varphi_5(x)=\ldots,$$

et il sera naturel de poser

$$\varphi_2(x) = x = \varphi_{-2}(x) = \varphi_{-4}(x) = \ldots,$$
$$\varphi(x) = \varphi_{-1}(x) = \varphi_{-3}(x) = \ldots;$$

$\varphi_{-1}(x)$ sera alors la fonction inverse de $\varphi(x)$. Pour satisfaire à l'équation

$$\varphi(x) = \varphi_{-1}(x),$$

il suffira de lier x à $\varphi(x)$ par une relation

$$F[x, \varphi(x)] = 0,$$

telle que $F(x, y)$ soit symétrique en x et y.

Supposons, par exemple,

$$\varphi(x) + x - a = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = a - x;$$

on aura

$$\varphi_2(x) = a + (x - a) = x.$$

Si l'on prend

$$\varphi(x)x = a \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = \frac{a}{x},$$

on aura

$$\varphi_2(x) = a : \frac{x}{a} = x, \quad \ldots.$$

On peut encore résoudre ce problème comme il suit : Pour simplifier l'écriture, nous écrirons $\varphi\psi x$, au lieu de $\varphi[\psi(x)]$. Alors désignons par $f(x)$ ou fx une solution particulière de

$$\varphi_2(x) = x;$$

une solution plus générale sera, en appelant ψ une fonction arbitraire,

$$\varphi(x) = \psi_{-1} f \psi(x).$$

En effet, on aura

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \psi_{-1} f \psi \psi_{-1} f \psi(x) \\ &= \psi_{-1} f_2 \psi(x) \\ &= \psi_{-1} \psi(x) = x; \end{aligned}$$

par exemple, en prenant $f(x) = a^m - x$, m, a désignant des

constantes, $\psi_{-1}[a^m - \psi(x)]$ sera une nouvelle solution de la question.

Cas général. — Soient $f(x)$ une solution particulière de l'équation

$$\varphi_n(x) = x \tag{1}$$

et $\psi(x)$ une fonction arbitraire : on aura une solution plus générale en prenant

$$\varphi(x) = \psi_{-1} f \psi(x);$$

en effet,

$$\varphi_2(x) = \psi_{-1} f \psi \psi_{-1} f \psi(x) = \psi_{-1} f_2 \psi(x);$$

par suite,

$$\varphi_3(x) = \psi_{-1} f_3 \psi(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_n(x) = \psi_{-1} f_n \psi(x) = \psi_{-1} \psi(x) = x.$$

Il reste à trouver des solutions particulières de l'équation (1) : à cet effet, posons

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}, \qquad \varphi_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{a'_i x + b'_i},$$

car $\varphi_i(x)$ sera comme $\varphi(x)$ une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur seront du premier degré. Nous aurons

$$\varphi_{i+1}(x) = \frac{a\dfrac{a_i x + b_i}{a'_i x + b'_i} + b}{a'\dfrac{a_i x + b_i}{a'_i x + b'_i} + b'} = \frac{(aa_i + ba'_i)x + ab_i + bb'_i}{(a'a_i + b'a'_i)x + a'b_i + b'b'_i};$$

donc

$$a_{i+1} = aa_i + ba'_i, \tag{2}$$

$$a'_{i+1} = a'a_i + b'a'_i, \tag{3}$$

$$b_{i+1} = ab_i + bb'_i, \tag{4}$$

$$b'_{i+1} = a'b_i + b'b'_i. \tag{5}$$

Soit λ une indéterminée : de (2) et (3), on tire

$$a_{i+1} + \lambda a'_{i+1} = a_i(a + \lambda a') + a'_i(b + \lambda b'),$$

en sorte que si l'on assujettit l'indéterminée λ à satisfaire à l'équation

$$b + \lambda b' = \lambda(a + \lambda a')$$

ou

$$(6) \qquad \lambda^2 a' + \lambda(a - b') - b = 0,$$

l'équation précédente deviendra

$$a_{i+1} + \lambda a'_{i+1} = (a_i + \lambda a'_i)(a + \lambda a'),$$

et l'on aura de même

$$b_{i+1} + \lambda b'_{i+1} = (b_i + \lambda b'_i)(a + \lambda a');$$

en remplaçant λ par les deux racines, λ_1 et λ_2, de l'équation (6) et $i + 1$ par n, on trouve

$$(7) \qquad \begin{cases} a_n + \lambda_1 a'_n = (a + \lambda_1 a')^n, \\ a_n + \lambda_2 a'_n = (a + \lambda_2 a')^n, \\ b_n + \lambda_1 b'_n = (a + \lambda_1 a')^n \lambda_1, \\ b_n + \lambda_2 b'_n = (a + \lambda_2 a')^n \lambda_2, \end{cases}$$

ce qui permet de calculer a_n, a'_n, b_n, b'_n. Mais poursuivons notre but, qui est de trouver une fraction telle que

$$\frac{a_n x + b_n}{a'_n x + b'_n} = x$$

ou que

$$a_n x + b_n = a'_n x^2 + b'_n x;$$

il faudra poser

$$a_n = b'_n, \qquad b_n = 0, \qquad a'_n = 0$$

ou, en vertu de (7),

$$a_n = (a + \lambda_1 a')^n,$$
$$a_n = (a + \lambda_2 a')^n;$$

ces deux équations donnent

$$a + \lambda_1 a' = (a + \lambda_2 a') e^{\frac{2\pi k \sqrt{-1}}{n}}$$

ou bien, en divisant par $e^{\frac{\pi k \sqrt{-1}}{n}}$ et remplaçant λ_1 et λ_2 par

leurs valeurs tirées de (6)

$$(a+b')\sin\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}=\sqrt{(b'-a)^2+4a'b}\cos\frac{k\pi}{n};$$

ce qui peut encore s'écrire

$$-(a+b')^2\sin^2\frac{k\pi}{n}=(a+b')^2\cos^2\frac{k\pi}{n}+4(a'b-b'a)\cos^2\frac{k\pi}{n}$$

ou enfin

$$(a+b')^2+4(a'b-b'a)\cos^2\frac{k\pi}{n}=0.$$

Telle est la relation à laquelle sont assujettis les coefficients a, b, a', b'. Si l'on suppose, ce qui est permis, $ab'-ba'=1$ (car, si $ab'-ba'$ était unl, $\varphi(x)$ ne serait plus variable), on aura

$$a+b'=2\cos\frac{k\pi}{n},\qquad ab'-ba'=1;$$

a et a' seront arbitraires; quant à b et b', ils se déduiront de là

$$b'=-a+2\cos\frac{k\pi}{n},$$

$$b=\frac{a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n}+1}{a'},$$

et le problème que nous avions en vue se trouve résolu.

(Babbage, *Recueil d'exemples de l'application du Calcul aux différences finies*, par Herschel, 1820).

VI. — Interpolation des fonctions itératives.

Les recherches de Babbage ont été l'origine de la théorie des fonctions *itératives*. On appelle itérative de degré k de $\psi(x)$ une fonction $\psi_k(x)$ définie par les équations

$$\psi_2(x)=\psi\psi(x),\qquad \psi_3(x)=\psi\psi_2(x),\qquad \ldots,\qquad \psi_k(x)=\psi\psi_{k-1}(x);$$

on définit $\psi_0(x)$ par l'équation

$$\psi_0(x) = x;$$

on désigne par $\psi_{-1}(x)$ l'inverse de $\psi(x)$, en sorte que

$$\psi_{-1}\psi(x) = \psi\psi_{-1}(x) = x = \psi_0(x);$$

on aura d'ailleurs par définition

$$\psi_{-1}\psi_{-1}(x) = \psi_{-2}(x), \qquad \psi_{-1}\psi_{-2}(x) = \psi_{-3}(x), \qquad \ldots,$$

$$\psi_{-n}\psi_n(x) = x.$$

Considérons maintenant la fonction φ, qu'Abel a appris à déterminer, définie par l'équation

$$\varphi\psi(x) = 1 + \varphi(x)$$

ou

(1) $$\psi(x) = \varphi_{-1}[1 + \varphi(x)];$$

nous définirons le symbole $\psi_k(x)$ par la formule

(2) $$\psi_k(x) = \varphi_{-1}[k + \varphi(x)].$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\psi_{k+l}(x) = \psi_k\psi_l(x);$$

en effet

$$\psi_k\psi_l(x) = \varphi_{-1}[k + \varphi\psi_l(x)]$$

et, par suite, en remplaçant $\psi_l(x)$ par sa valeur $\varphi_{-1}[l + \varphi(x)]$,

$$\psi_k\psi_l(x) = \varphi_{-1}[k + l + \varphi(x)] = \psi_{k+l}(x) = \psi_l\psi_k(x):$$

ainsi se trouve interpolée la fonction itérative ψ_k, comme l'a fait voir M. Korkine (*Bulletin des Sciences mathématiques,* septembre 1882).

M. Farkas (*Journal des Mathématiques pures et appliquées,* 3e série, t. X) s'occupe de la convergence de la fonction $\varphi_k(x)$ pour $k = \infty$.

VII. — Solution du problème d'Abel.

Nous allons reprendre le problème d'Abel qui a pour but la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\varphi\psi(x) = 1 + \varphi(x),$$

dans laquelle $\psi(x)$ est une fonction donnée, et $\varphi(x)$ une fonction à déterminer. La solution donnée par Abel a l'inconvénient de dépendre de l'intégration d'une équation aux différences aussi difficile à traiter que le problème que l'on veut résoudre, et nous allons essayer de procéder autrement. Désignons par $\theta(z)$ une fonction synectique à l'intérieur d'un contour fermé simple C, et supposons que les quantités $z_1 = \theta(z)$, $z_2 = \theta(z_1) = \theta_2(z)$, $z_3 = \theta(z_2) = \theta_3(z)$, ... tendent, quel que soit z, vers la limite ζ située à l'intérieur de C; pourvu que le point z soit lui-même intérieur à C, il est facile de voir que l'on aura à la fois

$$\theta(\zeta) - \zeta = 0. \qquad \operatorname{mod}\theta'(\zeta) \leqq 1.$$

La première formule est évidente, puisque z_n et $\theta(z_n)$ ont même limite ζ; quant à la seconde on la démontrera en considérant l'expression

$$(1) \qquad \frac{\theta(z_n) - \theta(\zeta)}{z_n - \zeta},$$

dont la limite pour $n = \infty$ ou $z_n = \zeta$ est $\theta'(z)$. Si $\theta'(\zeta)$ pouvait avoir un module supérieur à l'unité, le rapport précédent finirait, pour des valeurs suffisamment grandes de n, par avoir un module supérieur à 1, et alors la formule (1) donnerait

$$\operatorname{mod}[\theta(z_n) - \theta(\zeta)] > \operatorname{mod}(z_n - \zeta)$$

ou

$$\operatorname{mod}(z_{n+1} - \zeta) > \operatorname{mod}(z_n - \zeta),$$

et les nombres z_n, z_{n+1}, ... ne pourraient pas tendre vers ζ.

Réciproquement, si l'on a

$$\theta(\zeta) - \zeta = 0$$

et si la fonction $\theta(z)$ reste synectique aux environs du point ζ; si de plus on a $\operatorname{mod}\theta'(\zeta) < 1$, il existera un cercle décrit autour de ζ comme centre, tel que, z étant intérieur à ce cercle, on ait bien $\theta_n(z) = \zeta$.

En effet, z étant voisin de ζ, on a

$$\theta(z) - \theta(\zeta) = (z-\zeta)\theta'(\zeta) + \frac{(z-\zeta)^2}{2}\theta''(\zeta) + \ldots$$

ou bien

$$\frac{\theta(z) - \theta(\zeta)}{z-\zeta} = \theta'(\zeta) + (z-\zeta)P,$$

en désignant par P la quantité $\frac{1}{2}\theta''(\zeta) + \ldots$. Or on peut toujours supposer z assez voisin de ζ pour que $(z-\zeta)P$ reste aussi voisin de zéro que l'on veut : alors $\frac{\theta(z)-\theta(\zeta)}{z-\zeta}$ diffère de $\theta'(\zeta)$ d'aussi peu que l'on veut et, comme $\operatorname{mod}\theta'(\zeta) < 1$, on voit que le module de $\theta(z) - \theta(\zeta)$, pour des valeurs de z suffisamment voisines de ζ, est moindre que celui de $z - \zeta$; donc enfin, quand z est assez voisin de ζ, les quantités z, $\theta(z)$, $\theta_2(z)$, ... convergent vers ζ.

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{\theta_n(z) - \zeta}{[\theta'(z)]^n}$$

tend vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment, pourvu que $\theta(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, ... tendent eux-mêmes vers une limite ζ qui ne soit pas un point singulier pour la fonction $\theta(z)$, quel que soit z à l'intérieur d'un contour C *contenant ζ.*

En effet, en posant

$$\theta(z) = z_1, \qquad \theta(z_1) = z_2, \qquad \ldots,$$

on a

$$\theta(z_{n-1}) = \theta(\zeta) + (z_{n-1} - \zeta)\theta'(\zeta) + \ldots$$

ou bien

$$\theta_n(z) - \zeta = (z_{n-1} - \zeta)\theta'(\zeta) + \ldots$$

et, en divisant par $\theta_{n-1}(z) - \zeta$ ou $z_{n-1} - \zeta$,

$$\frac{\theta_n(z)-\zeta}{\theta_{n-1}(z)-\zeta} = \theta'(\zeta) + \ldots = \theta'(\zeta)[1 + \varepsilon_n].$$

Changeons n en $n-1$, $n-2$, ..., et multiplions les formules ainsi obtenues : nous aurons

$$\frac{\theta_n(z)-\zeta}{z-\zeta} = [\theta'(\zeta)]^n \, \Pi(1+\varepsilon)$$

ou enfin

$$\frac{\theta_n(z)-\zeta}{[\theta'(\zeta)]^n} = (z-\zeta)\, \Pi(1+\varepsilon).$$

Or la série $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ est convergente; car on a $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\frac{\theta''(\zeta)(z_{n-1}-\zeta)}{\theta'(\zeta)} + \ldots$, et le rapport $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$ diffère peu de $\frac{z_{n-1}-\zeta}{z_n-\zeta}$ qui a un module inférieur à 1.

Ainsi l'expression

$$\frac{\theta_n(z)-\zeta}{[\theta'(\zeta)]^n}$$

a une limite finie pour $n = \infty$: désignons-la par $\psi(z)$; on a identiquement

$$\frac{\theta_{n+1}(z)-\zeta}{[\theta'(\zeta)]^{n+1}} = \frac{1}{\theta'(\zeta)} \frac{\theta_n[\theta(z)]-\zeta}{[\theta'(\zeta)]^n},$$

c'est-à-dire, en faisant $n = \infty$,

$$\psi(z) = \frac{1}{\theta'(\zeta)} \psi[\theta(z)].$$

Prenons les logarithmes des deux membres : nous aurons

$$\log\psi(z) = -\log\theta'(\zeta) + \log\psi\,\theta(z)$$

ou

$$-\frac{\log\psi(z)}{\log\theta'(\zeta)} = 1 - \frac{\log\psi\,\theta(z)}{\log\theta'(\zeta)};$$

faisant

$$\frac{-\log\psi(z)}{\log\theta'(\zeta)} = \varphi(z),$$

on tombe sur l'équation d'Abel

$$1+\varphi(z)=\varphi\,\theta(z),$$

dont la solution est

$$\frac{\log\psi(z)}{\log\theta'(\zeta)} \quad \text{ou} \quad \lim \log\frac{\theta_p(z)-\zeta}{[\theta'(\zeta)]^p} : \log\theta'(\zeta).$$

Cette solution a été donnée par M. Kœnigs, dans *les Annales de l'École Normale* de 1884, et dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de décembre 1883.

VIII. — Problème de Gergonne.

Gergonne, dans ses *Annales*, t. XII, propose le problème suivant résolu par Tedenat dans le même Volume :

Trouver une courbe dans laquelle la normale soit égale à l'ordonnée qui rencontre l'axe des x au même point.

Soit $y=\varphi(x)$ l'équation de la courbe cherchée;

$$\varphi(x)\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}$$

est l'expression de la normale, $\varphi(x)\varphi'(x)$ celle de la sous-normale et $\varphi[\varphi(x)\varphi'(x)+x]$ celle de l'ordonnée qui doit être égale à la normale; l'équation du problème est alors

$$[\varphi(x)]^2\{1+[\varphi'(x)]^2\}=\{\varphi[\varphi(x)\varphi'(x)+x]\}^2.$$

Posons

$$[\varphi(x)]^2=2\psi(x),$$
$$\varphi(x)\varphi'(x)=\psi'(x);$$

l'équation précédente deviendra

$$2\psi(x)\left[1+\frac{\psi'^2(x)}{2\psi(x)}\right]=2\psi[\psi'(x)+x]$$

ou encore

$$2\psi(x)+\psi'^2(x)=2\psi[\psi'(x)+x].$$

Pour intégrer cette équation, nous commencerons par la différentier, ce qui donnera

$$2\psi'(x)+2\psi'(x)\psi''(x)=2\psi'[\psi'(x)+x][\psi''(x)+1]$$

ou

$$[\psi''(x)+1]\{2\psi'(x)-2\psi'[\psi'(x)+x]\}=0.$$

On déduit de là une première solution simple

$$\psi''(x)+1=0,$$
$$\psi(x)=A+Bx-\frac{x^2}{2};$$

d'où l'équation de la courbe cherchée

$$y^2=2A+2Bx-x^2:$$

c'est celle d'un cercle. Examinons maintenant l'autre solution donnée par la formule

$$\psi'(x)-\psi'[\psi'(x)+x]=0$$

ou, en posant $\psi'(x)=\theta(x)$,

(1) $$\theta(x)=\theta[\theta(x)+x].$$

Tedenat observe que l'on obtient une solution de cette équation en prenant $\theta(x)=0$, $\psi'(x)=0$, $\psi(x)=a$ et, par suite, $y^2=2a$, ce qui fournit deux droites parallèles. Pour les voir, il suffit de prendre la fonction θ^{-1} des deux membres de (1).

IX. — Usage des dérivées à indices quelconques.

Abel a rencontré l'équation suivante dans la solution d'un problème de Mécanique

$$\varphi(a)=\int_0^a\frac{f'(x)\,dx}{(a-x)^n}.$$

Voici la solution très simple que l'on peut donner de cette équation, dans laquelle $f(x)$ est une fonction à déterminer

et n un nombre compris entre zéro et un. Multiplions les deux membres par $\frac{\Gamma(n)}{2\pi\sqrt{-1}}$; nous aurons

$$\frac{\Gamma(n)\varphi(a)}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{\Gamma(n)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^a \frac{f'(x)\,dx}{(a-x)^n},$$

et en observant que

$$\int_0^a \frac{d^{n-1}f'(a)}{da^{n-1}} = \frac{\Gamma(n)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^a \frac{f'(x)\,dx\left(1-e^{-2n\pi\sqrt{-1}}\right)}{(x-a)^n},$$

on a

$$\int_0^a \frac{f'(x)\,dx}{(a-x)^n} = \frac{\pi}{\Gamma(n)\sin n\pi}\int_0^a \frac{d^n f(a)}{da^n};$$

l'équation à résoudre devient alors

$$\frac{\varphi(a)\Gamma(n)\sin n\pi}{\pi} = \int_0^a \frac{d^n f(a)}{da^n}$$

ou enfin

$$\int_0^a \frac{d^{-n}\varphi(a)}{da^{-n}}\,\frac{\Gamma(n)\sin n\pi}{\pi} = f(a).$$

CHAPITRE VII.

DES FONCTIONS HARMONIQUES.

I. — Préliminaires.

On sait fort peu de choses sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Il est probable que la plupart de ces équations aux dérivées partielles définissent un mode d'existence de la quantité qui ne peut être représenté par les signes ordinaires de l'Analyse. Si l'on considère, par exemple, l'équation très simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

on l'intègre facilement, comme on l'a vu, quand a est positif, et l'on a

$$u = f(y + \sqrt{a}\,x) + \mathrm{F}(y - \sqrt{a}\,x);$$

mais, si a est négatif, cette dernière formule ne fait plus connaître la solution générale, car le symbole $f(y + x\sqrt{-1})$ n'a plus de sens en général, et nous fixerons au contraire son sens au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

comme on le verra dans la suite. Le but des recherches que nous allons entreprendre sera l'étude des fonctions réelles satisfaisant aux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

surtout dans le cas où

$$n = 2.$$

Nous appellerons *fonction harmonique* de deux variables x et y, à l'intérieur d'un contour fermé ou d'une aire limitée par un ou plusieurs contours fermés, une fonction finie et continue, ainsi que ses dérivées premières et secondes pour toutes les valeurs de x et y représentant les coordonnées d'un point de cette aire et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0.$$

Plus généralement, une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera dite *harmonique* dans un domaine D, lorsqu'elle sera finie et continue, ainsi que ses dérivées premières et secondes, en tout point de ce domaine et qu'elle satisfera à l'équation suivante dans ce domaine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0.$$

II. — Théorème de Green.

Le théorème de Green dans le cas particulier des fonctions de deux variables consiste dans la formule

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy \\ &= -\iint v\, \Delta_2 u\, dx\, dy - \int v \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \\ &= -\iint u\, \Delta_2\, dx\, dy - \int u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds, \end{aligned} \right.$$

dont la signification va être indiquée.

u et v sont des fonctions continues de x et y, ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans une aire A limitée par un contour simple ou multiple dont l'arc élémentaire est représenté par ds; les intégrales doubles sont relatives à tous

les points de l'aire A, les intégrales simples sont relatives aux contours limites de cette aire, elles sont prises en cheminant dans le sens direct (l'aire à gauche). Enfin $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ sont des dérivées prises dans la direction de la normale intérieure à l'élément ds; le sens précis de cette locution va résulter des considérations suivantes.

Considérons l'intégrale

$$\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

et intégrons, par parties, le premier terme; nous aurons

$$(2)\qquad \int\int\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy=\int v\frac{\partial u}{\partial x}\,dy-\int\int v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

L'intégrale double qui figure au second membre est relative à l'aire A; quant à l'intégrale simple, la valeur $v\frac{\partial u}{\partial x}$, qui figure sous le signe $\int$, doit être remplacée par

$$-\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1+\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2-\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_3+\ldots;$$

l'indice placé au bas de chaque parenthèse indiquant que l'on doit remplacer x par les valeurs x_1, x_2, ..., qu'il prend sur le contour de l'aire A, aux points où la droite $y=$ const. vient couper ce contour. L'intégrale $\int v\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$ devra donc être prise en faisant varier le point xy sur le contour de l'aire A et en le faisant marcher dans le sens direct. On aurait de même

$$(3)\qquad \int\int\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy=\int v\frac{\partial u}{\partial y}\,dx-\int\int v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy;$$

mais l'intégrale simple devra être prise le long du contour A en cheminant cette fois dans le sens rétrograde. Si l'on ajoute

les formules (2) et (3), on aura alors, en prenant les deux intégrales simples dans le sens direct,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy \\ &\quad = \int v \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \int v \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \iint v\,\Delta_2 u\,dx\,dy. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on observe qu'en appelant n la direction de la normale intérieure au contour x, y, on a

$$\cos(n, x) = -\frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n, y) = \frac{dx}{ds},$$

et, si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn},$$

dx et dy représentant les variations que prennent x et y quand le point x, y se déplace de dn sur la normale intérieure à ds, on voit que $\frac{dx}{dn}$ et $\frac{dy}{dn}$ seront respectivement égaux à $-\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$, en sorte que l'on aura

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds},$$

et la formule (4) deviendra

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy = -\int v \frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \iint v\,\Delta_2 u\,dx\,dy;$$

ce qui démontre le théorème de Green, dont l'équation (4) est une autre expression moins condensée.

Corollaire I. — Lorsque les fonctions u et v sont harmoniques dans l'aire A, $\Delta_2 u$ et $\Delta_2 v$ sont nuls, et la formule (1) donne

$$(6)\qquad \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0,$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Corollaire II. — Supposons $u = v$ et la fonction u harmonique à l'intérieur de l'aire A : la formule (1) deviendra

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Si donc la fonction harmonique dans l'aire A est nulle sur le contour de cette aire, l'intégrale qui figure au second membre est nulle, et l'on a

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si dans l'aire A on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u = \text{const.},$$

et comme u est nul sur le contour, u est identiquement nul; donc :

Si une fonction harmonique dans une aire A est nulle tout le long du contour de cette aire, elle est nulle aussi en tous les points de cette aire.

Corollaire III. — *Il ne peut exister qu'une seule fonction harmonique à l'intérieur d'une aire A prenant sur le contour de cette aire des valeurs données.*

En effet, s'il pouvait exister deux fonctions u_1 et u_2 harmoniques dans l'aire A et prenant les mêmes valeurs sur le contour limitant cette aire, la différence $u_1 - u_2$, qui est évidemment harmonique, serait nulle sur le contour de l'aire et par suite nulle à l'intérieur de A : ainsi $u_1 = u_2$. c. q. f. d.

Rien ne prouve qu'il existe une fonction harmonique dans l'aire A prenant sur le contour de cette aire des valeurs données, au moins jusqu'à présent; tout ce que l'on peut affirmer, c'est qu'il n'y en a qu'une au plus. Rien ne prouve non plus qu'il n'y a qu'une fonction u satisfaisant à l'équation $\Delta_2 u = 0$, et prenant des valeurs données sur un contour donné, mais il n'y en a qu'une qui soit harmonique, c'est-

à-dire finie et continue, ainsi que ses dérivées dans l'aire limitée par le contour. Ces remarques sont importantes pour ce qui va suivre.

III. — Énoncé du principe de Dirichlet.

Riemann a étayé une théorie des fonctions de variables imaginaires sur un postulatum qu'il a appelé *principe de Dirichlet* et qui au fond revient à ceci :

Il existe une fonction harmonique à l'intérieur d'une aire A *et prenant des valeurs données sur le contour de cette aire.*

Nous démontrerons ce principe dans les paragraphes suivants; Riemann le déduisait du postulatum suivant, énoncé par Dirichlet :

Il existe une fonction u qui, parmi toutes celles qui sur le contour de l'aire A *prennent des valeurs données et restent finies et continues, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, rend l'intégrale*

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

minima.

Nous ne montrerons pas ici l'équivalence de ces deux principes; elle sera établie plus loin d'une façon plus générale.

Il est bien facile d'établir qu'il existe une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre, prenant sur la circonférence de ce cercle des valeurs données, pourvu que ces valeurs ne présentent pas une infinité de discontinuités non plus qu'une infinité de maxima, et enfin pourvu que parmi ces valeurs il n'y en ait point qui soient infinies. En effet, si une fonction de x et y est donnée le long du cercle en question, elle est sur ce cercle fonction de l'angle polaire θ défini par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y = \mathrm{R}\sin\theta;$$

elle est par suite développable par la formule de Fourier, c'est-à-dire que sur la circonférence de rayon R elle est de la forme

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots;$$

si alors on désigne par r le rayon vecteur d'un point (x, y) intérieur au cercle de rayon R, on aura $r < \mathrm{R}$, et, si l'on considère la fonction de r et θ ou de x et y

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} u = a_0 + a_1 \frac{r}{\mathrm{R}} \cos\theta + a_2 \frac{r^2}{\mathrm{R}^2} \cos 2\theta + \ldots \\ + a_1 \frac{r}{\mathrm{R}} \sin\theta + a_2 \frac{r^2}{\mathrm{R}^2} \sin 2\theta + \ldots; \end{aligned}\right.$$

cette fonction u sera finie et continue à l'intérieur du cercle de rayon R, la série qui figure dans (1) étant uniformément convergente; de plus elle sera harmonique : en effet, il est facile de voir qu'une quelconque des fonctions

$$r^n \cos n\theta, \qquad r^n \sin n\theta$$

est harmonique. Ces fonctions peuvent, en effet, se mettre sous les formes

$$\frac{(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n}{2}$$

et

$$\frac{(x + y\sqrt{-1})^n - (x - y\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

et il est facile de constater que $(x + y\sqrt{-1})^n$ et $(x - y\sqrt{-1})^n$ satisfont tous deux à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

C'est en partant de là que nous parviendrons à démontrer le principe de Dirichlet dans toute sa généralité. Quand nous dirons qu'une fonction peut prendre des valeurs arbitraires sur un contour, il faudra toujours sous-entendre que ces valeurs sont soumises à une certaine continuité analogue à celle des fonctions développables en séries trigonométriques.

IV. — Problème de la représentation conforme.

La démonstration du principe de Dirichlet est intimement liée à la démonstration de la possibilité de la résolution d'un problème dit de la *représentation conforme* et qui s'énonce ainsi :

Étant données deux aires A *et* A', *déterminer une fonction monodrome et monogène* $z' = f(z)$, *telle qu'à un point* z *de l'aire* A *elle fasse correspondre un point* z' *de l'aire* A' *et un seul, et* vice versa, *les points des contours limitant* A *et* A' *étant censés, à ce point de vue, faire partie intégrante des aires en question.*

Dans la représentation conforme, les points correspondants décrivent des figures qui, dans leurs dimensions infiniment petites, sont semblables (t. V, p. 93); on voit aussi que, si z et z' sont des points intérieurs aux aires A et A', on n'aura jamais ni $\frac{dz'}{dz} = 0$, ni $\frac{dz}{dz'} = 0$; sans quoi, si, par exemple, on avait $\frac{dz'}{dz} = 0$, l'équation $z' = f(z)$ aurait une racine double et deux points z correspondraient dans l'aire à un point z'.

Le problème de la représentation conforme peut être ramené au suivant : *Représenter une aire donnée sur le demi-plan situé au-dessus de l'axe des* x. En effet, si l'on sait représenter l'aire A sur l'aire A' et sur l'aire A'', il est bien évident que l'on saura par cela même représenter A' sur A''.

V. — Représentation conforme d'un polygone sur un demi-plan.

La représentation d'un polygone sur la portion de plan située au-dessus de l'axe des x va résulter de la discussion de la formule suivante, où nous supposerons

$$z_0 < a < b < c < \ldots < l,$$

$$z' = \int_{z_0}^{z} (a-z)^{\alpha-1}(b-z)^{\beta-1}\ldots(l-z)^{\lambda-1}\,dz, \tag{1}$$

z_0, a, b, ..., l sont des constantes quelconques réelles; α, β, ..., λ sont des nombres positifs satisfaisant à la relation

$$(2) \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = n - 2,$$

n désignant le nombre des quantités a, b, ... ou α, β, ...

1° *La fonction z' de z est synectique pour toute la portion de plan située au-dessus de l'axe des x.*

En effet, les seuls points critiques de z' sont les points $z = a, b, \ldots, l$ situés sur l'axe des x.

2° *La fonction z de z' est synectique à l'intérieur d'un polygone ayant pour sommets les points a', b', ... qui sont les valeurs de z' pour $z = a, b, \ldots$.*

En effet de (1) on tire

$$\frac{dz'}{dz} = (a - z)^{1-\alpha}(b - z)^{1-\beta} \ldots, (l - z)^{1-\lambda},$$

et cette équation différentielle définit une fonction synectique de z' autour de tout point pour lequel le second membre de cette équation reste synectique; z restera donc synectique à l'intérieur du polygone ayant pour sommets a', b', c', ... si, comme nous le supposerons, les côtés de ce polygone ne se coupent pas.

3° *Quand le point z décrit l'axe des x, le point z' décrit le périmètre du polygone fermé $a'b'c' \ldots l'$ dont les angles sont $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ..., $\lambda\pi$.*

En effet, quand $z < a$, z' est réel; il décrit une portion de l'axe des x et pour $z = a$ il se trouve en a' sur l'axe des x. Si z franchit le point a, z' devient imaginaire; mais son argument reste constant et égal à $\pi(\alpha - 1)$ jusqu'à ce que l'on ait $z = b$ et $z' = b'$; il décrit donc la droite qui joint $a'b'$. De même, quand z varie de b à c, z' décrit la droite $b'c'$ qui fait l'angle $\pi(\alpha - 1 + \beta - 1)$ avec l'axe des x, et ainsi de suite; les angles successifs du polygone sont donc $\pi\alpha$, $\pi\beta$, ...; ce

polygone se ferme d'ailleurs en vertu de l'hypothèse contenue dans la formule (2).

4° *Quand le point z se meut au-dessus de l'axe des x, le point z' se meut à l'intérieur du polygone $a'b'c'\ldots l'$.*

En effet, si z est imaginaire, mettons l'intégrale (1) sous la forme

$$z' = \int_{z_0}^{b} \ldots + \int_{b}^{b+re^{\theta\sqrt{-1}}} \ldots$$

ou encore

$$z' = b' + \int_0^r (a - b - re^{\theta\sqrt{-1}})^{\alpha-1}(-re^{\theta\sqrt{-1}})^{\beta-1} \times (c - b - re^{\theta\sqrt{-1}})^{\gamma-1} \ldots e^{\theta\sqrt{-1}}\,dr,$$

ou enfin

$$z' = b' + e^{\pi\sqrt{-1}(\beta-1)+\theta\beta\sqrt{-1}} \int_0^r (a - b - re^{\theta\sqrt{-1}})^{\alpha-1} \ldots r^{\beta-1}\,dr.$$

Supposons r très petit et, le point z devant être au-dessus de l'axe des x, θ compris entre o et π. Quand θ varie à partir de zéro, l'intégrale qui figure dans la formule précédente reçoit un accroissement très petit et son argument varie très peu; le facteur exponentiel qui multiplie l'intégrale varie sensiblement et son argument croît proportionnellement à θ, en sorte que le point z' pénètre dans le polygone $a'b'c'\ldots$.

Ainsi, lorsque le point z pris dans le voisinage d'un point $(a, b, c, \ldots)$ s'élève au-dessus de l'axe des x, le point z' pénètre à l'intérieur du polygone $a'b'c'\ldots$; maintenant, z restant au-dessus de l'axe des x, je dis que z' ne pourra plus sortir du polygone en question. En effet, s'il pouvait en sortir, il traverserait l'un des côtés et z traverserait l'axe des x, car à une valeur de z' ne correspond qu'une valeur de z.

5° *Quand le point z' se meut dans le polygone $a'b'c'\ldots$, le point z reste au-dessus de l'axe des x.*

En effet, si le point z pouvait passer dans la région située

au-dessous de l'axe des x, il traverserait cet axe et le point z' traverserait le périmètre du polygone $a'b'c'\ldots$.

6° *Reprenons la formule* (1) : *je dis que l'on peut choisir* $z_0, a, b, \ldots, l; \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, *de telle sorte que le polygone* $a'b'c'\ldots$ *soit égal à un polygone donné.*

En effet, pour $z = z_0$, le point z' est à l'origine, et, pour $z = a$, $z' = a'$, le point a' est sur l'axe des x, le côté $l'a'$ est dirigé suivant l'axe des x; les parties réelles des intégrales

$$\int_a^b d\omega, \quad \int_b^c d\omega, \quad \ldots, \quad \int_l^a d\omega,$$

dans lesquelles $d\omega$ désigne la différentielle qui entre dans l'intégrale qui figure dans la formule (1), sont les projections des côtés du polygone $a'b'c'\ldots$, sur l'axe des x; en se donnant ces projections et les angles $\pi\alpha$, $\pi\beta$, ... du polygone, ce dernier sera déterminé et le polygone $a'b'c'\ldots$ sera aussi déterminé de forme par les équations

$$\text{proj.}\, a'b' = \int_a^b d\omega, \qquad \text{proj.}\, b'c' = \int_b^c d\omega, \qquad \ldots,$$

dont les premiers membres sont

$$\overline{a'b'}\cos(1-\alpha)\pi, \qquad \overline{b'c'}\cos(1-\alpha+1-\beta)\pi, \qquad \ldots$$

7° *Enfin je dis que l'on peut opérer la représentation conforme d'un polygone quelconque sur le demi-plan situé au-dessus de l'axe des* x.

Il suffit, en effet, pour cela de faire usage de la formule

$$z'' = \mathrm{A}z' + \mathrm{B} = \mathrm{A}\int_{z_0}^{z} (a-z)^{\alpha-1}(b-z)^{\beta-1}\ldots dz + \mathrm{B},$$

A et B désignant des constantes.

Si l'on suppose A de la forme $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, le point z'' s'obtiendra en transportant z' dans la direction $\arg \mathrm{B}$ d'une

longueur égale à mod B et en faisant tourner le point ainsi obtenu d'un angle φ autour de l'origine; la formule

$$z'' = A z' + B$$

permettra donc de présenter sur le demi-plan des y positifs un polygone obtenu en imprimant à $a' b' c' \ldots$ une translation et une rotation arbitraires, ce qui établit la possibilité de la représentation conforme d'un polygone quelconque sur le demi-plan situé au-dessus de l'axe des x.

VI. — Représentation conforme d'un demi-plan sur un cercle.

Si l'on pose

$$z = -R\sqrt{-1} + re^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad z' = -R\sqrt{-1} + \frac{2R^2}{r} e^{\theta\sqrt{-1}},$$

ce qui donne

$$\operatorname{mod}(z + R\sqrt{-1}) \operatorname{mod}(z' + R\sqrt{-1}) = 2R^2,$$

quand le point z se mouvra dans un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre, le point z' décrira toute la partie du plan située au-dessus de l'axe des x; il est facile de voir en effet que les points z et z' sont transformés l'un de l'autre par rayons vecteurs réciproques; le pôle de la transformation est le point $-R\sqrt{-1}$, et le module est $2R^2$; le cercle se transforme en l'axe des x et les points intérieurs au cercle donnent des points situés au-dessus de cet axe. Cela établit la possibilité de la représentation d'un polygone sur un cercle.

La méthode que nous avons indiquée pour la représentation d'un polygone sur le demi-plan des y positifs a l'inconvénient d'être synthétique : la formule qui conduit à cette représentation a été donnée analytiquement par M. Schwarz, (*Crelle,* t. 70); mais la démonstration de M. Schwarz, reproduite en français dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux (p. 170 et suiv.), suppose que la représentation est possible. La vérification que nous avons faite était

absolument nécessaire pour l'objet que nous avons en vue; c'est pour éviter les longueurs que nous avons supprimé la démonstration analytique de M. Schwarz.

VII. — Fonctions harmoniques dans un polygone.

Supposons que l'on sache déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un contour A et, prenant sur ce contour des valeurs données, désignons par S la substitution qui permet d'établir une représentation conforme de l'aire A sur une autre aire B (si cette représentation est possible); cette substitution imaginaire peut être remplacée par deux autres réelles, permettant de faire correspondre à un point (x', y') de A un point (x, y) de B.

Cela posé, supposons que l'on désire une fonction harmonique u de (x, y) à l'intérieur de B et se réduisant à U sur le contour même de B.

Par hypothèse, en posant

$$x = \varphi(x', y'), \qquad y = \psi(x', y'),$$

l'aire B se transforme dans l'aire A, point par point. La fonction U se transforme en U'; par hypothèse aussi, on peut déterminer une fonction harmonique u' à l'intérieur de A et devenant U' sur le contour de A; il y a donc une fonction u dans laquelle se transforme u' qui prend la valeur U sur le contour B. Je dis que cette fonction est harmonique à l'intérieur de B; en effet, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 &+ 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}\,\frac{\partial x'}{\partial x}\,\frac{\partial y'}{\partial x}\\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x'}\,\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y'}\,\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Si l'on forme par symétrie $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ou $\Delta_2 u$ et si l'on

observe ensuite que (p. 93, t. V) $\Delta_2 x' = 0$, $\Delta_2 y' = 0$, on aura

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}\right);$$

mais les coefficients de $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$ sont égaux en vertu des formules (p. 93, t. V)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x};$$

le coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$ est nul en vertu des mêmes formules. Enfin la fonction u ou u' étant harmonique dans le contour A, on a

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = 0;$$

il en résulte que $\Delta_2 u' = 0$, et que la fonction u' est harmonique et prend des valeurs données sur le contour B.

Des propositions que nous venons de démontrer il résulte que :

Il existe une et une seule fonction harmonique dans l'intérieur d'un polygone donné P *et prenant sur le contour de ce polygone des valeurs données, pourvu que ces valeurs satisfassent à la loi de continuité, excepté en un nombre fini de points.*

Puisqu'il existe une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle prenant des valeurs données sur ce cercle, et que l'on peut représenter d'une manière conforme un polygone sur un demi-plan et un demi-plan sur un cercle.

VIII. — Les fonctions de Green.

Soient S un contour fermé, O un point intérieur à ce contour et fixe, r la distance du point (x, y) au point O. On appelle

fonction de Green la fonction égale à $\log\frac{1}{r}$ sur le contour S et harmonique à l'intérieur de ce contour. L'existence de la fonction de Green n'est établie jusqu'ici que pour des contours polygonaux; mais il est clair que ces contours peuvent être tels que l'aire qu'ils circonscrivent se recouvre elle-même plusieurs fois.

Cherchons à établir l'existence de la fonction de Green pour un contour quelconque S et un point intérieur O. A cet effet, construisons des polygones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ entièrement intérieurs à la courbe S, mais tendant à se confondre avec cette courbe et tels que P_1 soit intérieur à P_2, P_2 à P_3, ... On peut supposer le point O intérieur à tous ces polygones et construire pour chacun d'eux une fonction de Green. Soient G_1 la fonction de Green relative à P_1, G_2 la fonction de Green relative à P_2, ...

(La fonction de Green G, relative à un contour S, est toujours moindre que $\log\frac{1}{r}$; en effet, la fonction $G - \log\frac{1}{r}$ est nulle sur le contour S; elle est très grande et négative autour du point O; si donc elle pouvait être positive dans l'intérieur de S, il y aurait dans l'intérieur de S une courbe fermée S′ le long de laquelle on aurait $G = 0$, ce qui est absurde, car G étant harmonique ne saurait être nulle le long des contours S, S′, sans être nulle dans l'aire comprise entre ces contours.)

Je dis que l'on aura $G_1 > G_2 > G_3 > \ldots > G_n$. En effet, sur P_2, la fonction $G_2 - \log\frac{1}{r}$ est nulle; elle est négative à l'intérieur de P_2 et par conséquent sur P_1 où $G_1 - \log\frac{1}{r}$ est nul; donc $G_2 - G_1$ est négatif sur P_1; il ne peut plus devenir nul à l'intérieur de P_1, sans quoi entre deux contours il serait toujours nul : donc $G_2 - G_1$ reste négatif; ainsi l'on a bien

$$G_1 > G_2 > G_3 > \ldots.$$

Considérons alors la série

$$(1)\quad G = G_1 + (G_2 - G_1) + (G_3 - G_2) + \ldots + (G_{n+1} - G_n) + \ldots;$$

elle est convergente, car elle est à termes positifs, et la somme de ses n premiers termes est G_n, qui ne croît pas indéfiniment, puisqu'il reste inférieur à G_1. Nous allons prouver que G_n a pour limite $\log\frac{1}{r}$ lorsqu'on s'approche du contour S. Considérons un polygone II voisin de S, mais extérieur à S : soit K la fonction de Green relative à ce polygone; K sera moindre que G et différera de G_n d'aussi peu que l'on voudra, en sorte que

$$G_n > G > K;$$

mais G_n et K diffèrent sur le contour S d'aussi peu que l'on veut de $\log\frac{1}{r}$; donc, *a fortiori*, G différera d'aussi peu que l'on veut de $\log\frac{1}{r}$ sur ce contour, donc sur ce contour $G = \log\frac{1}{r}$. D'ailleurs la série (1) uniformément convergente qui définit G est une fonction harmonique.

IX. — Sur une propriété remarquable des fonctions de Green.

Soit G_1 *la fonction de Green égale à*

$$\log\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} = \log\frac{1}{r_1}$$

sur le contour S, *et* G_2 *la fonction de Green égale à*

$$\log\frac{1}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = \log\frac{1}{r_2}$$

sur le même contour, x_1, y_1 *et* x_2, y_2 *désignant des points intérieurs à ce contour : on aura*

$$G_1(x_2, y_2) = G_2(x_1, y_1).$$

En effet, considérons un contour S′ voisin de S et intérieur à S, le long duquel on ait

$$G_1 - \log\frac{1}{r_1} = \alpha,$$

α étant une quantité très petite : entourons les points x_1, y_1 et x_2, y_2 de cercles de rayons très petits R_1 et R_2 ; enfin appliquons le théorème de Green aux fonctions

$$v = G_1 - \log\frac{1}{r_1} - \alpha,$$

$$u = G_2 - \log\frac{1}{r_2},$$

et à l'aire limitée par S' et par les deux cercles R_1 et R_2 ; nous aurons, en observant que u et v sont harmoniques,

$$(1) \qquad \iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Dans cette formule, l'intégrale simple est prise à la fois le long de S' dans le sens direct et le long des cercles R_1 et R_2 dans le sens rétrograde ; le long de S', v est égal à zéro ; l'intégrale simple en question se réduit à

$$\int_0^{2\pi}\left(G_1 - \log\frac{1}{r_1} - \alpha\right)\frac{\partial\left(G_2 - \log\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n}R_1\,d\theta$$
$$+\int_0^{2\pi}\left(G_1 - \log\frac{1}{r_1} - \alpha\right)\frac{\partial\left(G_2 - \log\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n}R_2\,d\theta.$$

La première intégrale est nulle pour $R_1 = 0$, car $r_1 = R_1$; la seconde se réduit à

$$-2\pi\left[G_1(x_2, y_2) - \left(\log\frac{1}{r_1}\right)_2\right],$$

car $\dfrac{\partial \log\frac{1}{r_2}}{\partial r} = \dfrac{1}{R_2}$; on verrait de même que l'intégrale double qui figure dans (1) est

$$-2\pi\left[G_2(x_1, y_1) - \left(\log\frac{1}{r_2}\right)_1\right],$$

et, comme $\left(\log\frac{1}{r_1}\right)_2 = \left(\log\frac{1}{r_2}\right)_1$, les deux membres de cette

formule désignant le logarithme de l'inverse de la distance des points x_1, y_1 et x_2, y_2, on en conclut

$$G_1(x_2, y_2) = G_2(x_1, y_1).$$

C. Q. F. D.

X. — Fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour donné.

Soit u une fonction harmonique de x et y dans un contour fermé S; soit U la valeur que prend cette fonction sur le contour lui-même : il est facile d'exprimer u au moyen de U, en sorte qu'il suffit de connaître u sur le contour S pour pouvoir le calculer pour toutes les valeurs de x, y répondant à un point intérieur.

En effet, appelons r la distance du point (x, y) à un point (a, b); supposons le point (x, y) fixe et le point (a, b) variable; appliquons alors le théorème de Green aux fonctions $u(a, b)$ et $\log\frac{1}{r}$ en prenant pour aire celle qui est limitée par le contour S et un petit cercle de rayon R décrit autour du point (x, y) comme centre; nous aurons

$$\int u \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\, ds - \int \log\frac{1}{r}\, \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

les intégrales étant prises dans le sens positif sur le contour S, et dans le sens négatif sur la circonférence du rayon R. Le long de la circonférence du cercle, la première intégrale est égale à

$$-\int_0^{2\pi} u\left(\frac{1}{R}\right) R\, d\theta,$$

et, quand R est infiniment petit, cette intégrale se réduit à $2\pi u(x, y)$; la seconde intégrale se réduit à

$$-\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{R}\, \frac{\partial u}{\partial n}\, R\, d\theta;$$

elle est nulle pour $R=0$ et l'on a, par suite,

$$2\pi u=\int\left(u\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}-\log\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

l'intégrale étant prise le long du contour S, et mieux

$$(1)\qquad 2\pi u=\int\left(U\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}-\log\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds.$$

r désigne alors la distance de l'élément ds qui a pour coordonnées a, b au point intérieur (x, y). Soit g la fonction de Green qui sur le contour S se réduit à $\log\frac{1}{r}$, si l'on applique le théorème de Green aux fonctions u et g, mais, pour un contour S′ très voisin de S et intérieur à S, on a

$$\int\left(U'\frac{\partial G'}{\partial n}-G'\frac{\partial U'}{\partial n}\right)ds'=0,$$

U′ et G′ désignant les valeurs de u et g sur le contour S′; en combinant cette équation avec (1), on a

$$(2)\qquad 2\pi u=\int U\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}ds-\int U'\frac{\partial G'}{\partial n}ds'+\Omega,$$

Ω désignant la quantité

$$\Omega=\int\frac{\partial U'}{\partial n}G'ds-\int\frac{\partial U}{\partial n}\log\frac{1}{r}ds.$$

Si l'on fait converger le contour S′ vers S, G′ tend vers $\log\frac{1}{r}$ et Ω tend vers 0; la formule (2) devient alors

$$(3)\qquad 2\pi u=\int U\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}-\lim\int U'\frac{\partial G'}{\partial n}ds'.$$

XI. — Principe de Dirichlet.

La formule (3) permet, *quand elle existe,* de construire une fonction harmonique dans un contour donné S, quand on se donne les valeurs de cette fonction sur ce contour. Il y a lieu de se demander si cette formule (3) qui peut servir à la définition d'une fonction u, quand on se donne U, ne définirait pas en tout cas une fonction harmonique à l'intérieur de S, prenant sur ce contour les valeurs données U, auquel cas le principe de Dirichlet se trouverait démontré.

Ainsi, pour démontrer le principe de Dirichlet, il suffit de montrer que la fonction u donnée par l'équation

$$(1) \qquad 2\pi u = \int \mathrm{U} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \lim \int \mathrm{U}' \frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial n} ds'$$

est harmonique dans l'aire limitée par S et converge vers U, quand le point (x, y) converge vers un point du contour S.

Occupons-nous d'abord de l'intégrale

$$\int \mathrm{U} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds,$$

et cherchons la valeur qu'elle prend quand le point (x, y) converge vers le point (X, Y) situé sur le contour S. A cet effet, partageons le contour S en deux parties, l'une infiniment petite, S_1, contenant le point (X, Y), et l'autre, $S - S_1$: la portion de l'intégrale relative à $S - S_1$ est finie; nous la représenterons par P; l'autre relative à S_1 peut se mettre sous la forme

$$\int \mathrm{U} \left(\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial a} db - \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial b} da \right) = -\int \mathrm{U} \left(\frac{x - a}{r^2} db - \frac{y - b}{r^2} da \right)$$
$$= \int \mathrm{U}\, d \operatorname{arctang} \frac{y - b}{x - a},$$

le champ de l'intégrale étant infiniment petit. Si l'on suppose U continu, la valeur de cette intégrale sera

$$U_X \int d \operatorname{arctang} \frac{y-b}{x-a},$$

en appelant U_X la valeur de U en (X, Y); quant à

$$\int d \operatorname{arctang} \frac{y-b}{x-a},$$

c'est l'angle sous lequel on voit du point (x, y) l'arc S_1. Si le point (X, Y) est un point ordinaire du contour S, cet angle sera égal à π. Si (X, Y) est un point où les tangentes font un angle α, l'intégrale en question sera $2\pi - \alpha$, de sorte que l'intégrale relative à S_1 sera πU_X; en résumé, on a pour $x = X$, $y = Y$,

$$(2) \qquad \int U \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds = P + \pi U_X.$$

Occupons-nous maintenant de l'intégrale

$$V = \int U' \frac{\partial G'}{\partial n} ds'.$$

Cette intégrale est prise le long d'un contour S' intérieur à S et infiniment voisin de S : nous supposerons S' parallèle à S, et le point (a', b') de S' aura pour correspondant le point (a, b) de S, en sorte que $\frac{db}{da} = \frac{db'}{da'}$. La fonction V est harmonique dans S et dans S'. Il pourrait y avoir doute à cet égard dans le cas où le point (x, y) se trouverait *sur* le contour S; mais, en vertu du théorème démontré § IX, on peut remplacer G' qui est relative à un point de S, par la fonction de Green relative à un point de S'. Calculons maintenant la valeur de V : à cet effet, partageons le contour S' en deux, l'un S'_1 correspondant au contour que nous avons appelé S, tout à l'heure, et l'autre $S' - S_1$; l'intégrale V, prise le long de $S' - S_1$, sera égale à P; il reste alors à évaluer l'intégrale

$$V_1 = \int U' \frac{\partial G'}{\partial n} ds$$

le long de l'arc S'_1. Or, le point (x, y) coïncidant avec X, Y, on peut remplacer G' par $\log\frac{1}{r}$, et l'on a

$$V_1 = \int U' \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} ds'.$$

En transformant cette intégrale, on trouve, par un calcul analogue à celui que nous avons fait tout à l'heure,

$$V_1 = \int U' d \operatorname{arc\,tang} \frac{Y - b'}{X - a'}$$

ou

$$V_1 = U_X \int d \operatorname{arc\,tang} \frac{Y - b'}{X - a'}.$$

L'intégrale est l'angle sous lequel on voit de X, Y l'arc S'_1; elle est donc égale à $-\pi$ si le point X, Y est ordinaire et à α s'il est anguleux; ainsi, en général, $V_1 = -\pi U_X$, par suite à la limite

$$V = \int U' \frac{\partial G'}{\partial n} ds = P - \pi U_X.$$

De cette formule, de (1) et (2) on tire, pour $x = X, y = Y$,

$$u = 2\pi U_X,$$

ce qui démontre le principe de Dirichlet.

Il est bien difficile de dire à qui nous devons la démonstration du principe de Dirichlet, un grand nombre de géomètres ayant apporté des éléments à cette démonstration. La démonstration que nous venons de présenter est en grande partie extraite de l'Ouvrage de M. Harnack : *Die Grundlage der Theorie des logarithmischen Potentiales,* qui a réellement achevé la démonstration.

XII. — Complément des théories précédentes.

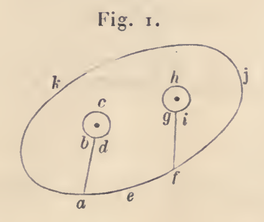
On peut donner plus d'extension au principe de Dirichlet; ainsi :

Il existe une et une seule fonction harmonique à l'inté-

rieur d'une aire limitée par plusieurs contours (polyadelphe) et prenant des valeurs déterminées sur les contours limitateurs (pourvu que ces valeurs n'aient qu'un nombre limité de discontinuités ou de maxima et de minima, et ne deviennent pas infinies).

Considérons, par exemple, l'aire ci-contre limitée par un contour *akjf* extérieur et deux contours intérieurs *bcd*, *ghi*; on la transformera en une aire à un seul contour (monadelphe) au moyen de deux coupures *ab* et *fg*, le contour unique

Fig. 1.



sera *abcdaefghifjka*. La fonction u, harmonique dans la nouvelle aire, prenant sur l'ancien contour la valeur U et sur les coupures *ab*, *gf* la valeur V, que nous laisserons indéterminée pour un instant, sera donnée par la formule

$$2\pi u = \int \left(\mathrm{U}\, \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r}\, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} \right) ds + \int \left(\mathrm{V}\, \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r}\, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \right) ds,$$

formule dans laquelle r désigne toujours la distance du point x, y à l'élément ds et dans laquelle la première intégrale est relative au contour primitif, et la seconde aux coupures.

Mais la fonction V étant arbitraire, on peut supposer qu'elle prend des valeurs égales sur les deux bords de chaque coupure, ainsi que le rapport $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}$; il reste alors

$$(1) \qquad 2\pi u = \int \left(\mathrm{U}\, \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r}\, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} \right) ds.$$

Telle est l'expression de la fonction harmonique dans l'aire donnée et prenant la valeur U sur les limites de cette aire. En réalité, la fonction V n'est pas arbitraire, parce que u doit être continu ; mais elle n'a heureusement pas besoin d'être connue, puisqu'elle disparaît; sa valeur peut d'ailleurs être censée tirée de (1).

Nous ferons observer encore que le principe de Dirichlet se trouve établi pour des aires quelconques situées sur des surfaces de Riemann; car, dans la représentation conforme d'un polygone sur un demi-plan, nous n'avons pas supposé explicitement que les aires balayées par un côté du polygone donné pour passer sur le côté suivant n'avaient pas déjà été balayées par les côtés précédents.

XIII. — Conséquences du principe de Dirichlet.

Théorème I. — *Une fonction* $X + Y\sqrt{-1}$ *synectique de* $x + y\sqrt{-1}$, *à l'intérieur d'une aire* A *limitée par un seul contour, est bien déterminée quand on se donne la partie réelle* X *sur le contour de l'aire* A *et la valeur du coefficient* Y *de* $\sqrt{-1}$ *en un point intérieur* x_0, y_0 *de l'aire.*

En effet, on a (t. III, p. 223)

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x};$$

si l'on différentie la première de ces équations par rapport à x, la seconde par rapport à y, et si l'on ajoute les résultats, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 X = 0;$$

on aurait de même $\Delta_2 Y = 0$. Les fonctions X et Y sont donc harmoniques dans l'aire A. Or, d'après le principe de Dirichlet, il existe une et une seule fonction X harmonique dans

l'aire A, prenant sur le contour de cette aire des valeurs données (comme il a été expliqué); X étant déterminé, les équations (1) montrent que

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy = -\frac{\partial X}{\partial y}dx + \frac{\partial X}{\partial x}dy.$$

Intégrant la différentielle exacte [en vertu de (1)]

$$-\frac{\partial X}{\partial y}dx + \frac{\partial X}{\partial x}dy,$$

on aura Y à une constante près, qui sera déterminée, si l'on se donne la valeur de Y pour une valeur particulière de $x+y\sqrt{-1}$ ou si l'on se donne Y pour $x=x_0$, $y=y_0$; X et Y ainsi déterminés, $X+Y\sqrt{-1}$ sera une fonction synectique de $x+y\sqrt{-1}$ dans l'aire A, X prendra des valeurs données sur le contour de A, Y prendra une valeur donnée en un point donné de cette aire.

Théorème II. — *Il existe une et une seule fonction* $X+Y\sqrt{-1}$, *monodrome et monogène dans une aire* A *limitée par un contour simple, dont la partie réelle* X *prend des valeurs données sur le contour, dont le coefficient de* $\sqrt{-1}$ *prend une valeur donnée en un point donné de l'aire* A *et qui admet en des points donnés de l'aire* A *des discontinuités données.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points critiques de la fonction, donnés par hypothèse dans l'aire A; nous nous donnerons les discontinuités de la fonction en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en disant, par exemple, que $X+Y\sqrt{-1}-\left[\frac{A_{i1}}{x-a_i}+\frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2}+\ldots\right]$ n'est plus ni infini ni indéterminé en a_i; $A_{i1}, A_{i2}, \ldots$ désignant des constantes en nombre fini ou infini.

La fonction

$$X+Y\sqrt{-1}-\sum_i\left[\frac{A_{i1}}{x-a_i}+\frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2}+\ldots\right]$$

sera alors synectique dans l'aire A et bien déterminée, puisque, X prenant des valeurs données sur le contour de A, sa partie réelle prendra aussi sur ce contour des valeurs bien déterminées et que le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera donné en un point de l'aire; $X + Y\sqrt{-1}$ sera donc lui-même bien déterminé.

CHAPITRE VIII.

VARIATION DES INTÉGRALES MULTIPLES.

I. — Préliminaires.

Nous avons vu que la recherche des maxima des intégrales simples était hérissée de difficultés. Celle des maxima des intégrales multiples est encore bien plus compliquée, vu qu'elle conduit à l'intégration d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

Pour étudier les variations que subit une intégrale multiple quand on change la forme des fonctions soumises à l'intégration, nous supposerons que les fonctions des variables d'intégration contiennent, outre ces variables, des paramètres α_1, α_2, ... dont les accroissements produiront les changements de forme des fonctions en question et, par suite, les variations de l'intégrale proposée.

Les différentielles totales relatives aux paramètres α_1, α_2, ... seront représentées par la caractéristique δ et porteront le nom de *variations;* les différentielles relatives aux variables d'intégration seront toujours représentées avec la caractéristique d.

L'étude préalable que nous allons entreprendre doit être considérée comme la recherche de l'expression de la différentielle d'une intégrale multiple; pour y parvenir, nous allons résoudre successivement plusieurs questions.

II. — Différentiation sous le signe $\int$.

Pour différentier par rapport aux paramètres α une inté-

grale, on observe que, F désignant une fonction de $x, y, z, \ldots,$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ on a

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\, dx = \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\, \delta x - \int_{x_0}^{x_1} \delta \mathrm{F}\, dx;$$

par suite

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, dx\, dy = \Big|_{x_0}^{x_1} \delta x \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, dy - \int_{x_0}^{x_1} dx\, \delta \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, dy$$

ou

$$\begin{aligned}\delta \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, dx\, dy = \Big|_{x_0}^{x_1} \delta x \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, dy - \int_{x_0}^{x_1} dx \Big|_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}\, \delta y \\ + \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \delta \mathrm{F}\, dx\, dy;\end{aligned}$$

on a de même

$$\begin{aligned}\delta \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{F}\, dx\, dy\, dz = \Big|_{x_0}^{x_1} & \delta x \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{F}\, dy\, dz \\ & - \int_{x_0}^{x_1} dx \Big|_{y_0}^{y_1} \delta y \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{F}\, dz \\ & + \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \Big|_{z_0}^{z_1} \mathrm{F}\, \delta z \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \delta \mathrm{F}\, dx\, dy\, dz,\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Une expression, telle que

$$\Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F},$$

peut se mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, dx;$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\delta \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F} &= \delta \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, dx \\
&= \Big|_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, \delta x - \int_{x_0}^{x_1} \delta \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, dx \\
&= \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, \delta x - \delta \mathrm{F} \right).
\end{aligned}$$

En général, une expression contenant des signes d'intégration et de substitution mélangés pourra se remplacer par une intégrale multiple, que l'on saura par suite différentier par rapport aux paramètres α.

III. — Intégration par parties.

L'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} u \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

peut être transformée de manière que v n'y figure plus par sa dérivée; en effet, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} uv\, dy\, dz \\
&\quad = \Big|_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{dx} \int_{z_0}^{z_1} uv\, dz - \int_{y_0}^{y_1} dy \Big|_{z_0}^{z_1} uv \frac{\partial z}{\partial x} + \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial\, uv}{\partial x}\, dy\, dz;
\end{aligned}$$

résolvant par rapport à $\int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} u \frac{\partial v}{\partial x}\, dy\, dz$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} u \frac{\partial v}{\partial x}\, dy\, dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} uv\, dy\, dz - \Big|_{y_0}^{y_1} \frac{\partial y}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} uv\, dz \\
+ \int_{y_0}^{y_1} du \Big|_{z_0}^{z_1} uv \frac{\partial z}{\partial x} - \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} v \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\, dz,
\end{aligned}$$

et en intégrant de x_0 à x_1

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} u\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \Big|_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} uv\,dy\,dz$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}dx\Big|_{y_0}^{y_1}\frac{\partial y}{\partial x}\int_{z_0}^{z_1}uv\,dz$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\Big|_{z_0}^{z_1}uv\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} v\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

IV. — Variation d'une intégrale double.

Nous supposerons qu'il s'agisse de faire varier l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t)\,dx\,dy.$$

F désignant une fonction de la fonction z de x et y et p, q, r, s, t désignant $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Nous ferons

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = \mathrm{X},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = \mathrm{Y},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = \mathrm{Z},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p} = \mathrm{P},$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q} = \mathrm{Q},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r} = \mathrm{R},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial s} = \mathrm{S},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} = \mathrm{T};$$

nous aurons alors

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1}\delta x\int_{y_0}^{y_1}\mathrm{F}\,dy + \int_{x_0}^{x_1}dx\Big|_{y_0}^{y_1}\mathrm{F}\,\delta y$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}dx\,dy(\mathrm{Z}\,\delta z + \mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \mathrm{S}\,\delta s + \mathrm{T}\,\delta t).$$

Si l'on intègre alors par parties une fois les termes en δp et

δq, deux fois les termes en δr, δs, δt, on trouve

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(Z - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\delta z\,dx\,dy$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\left[Q - P\frac{\partial y}{\partial x} + R\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}\right]\delta z\,dx$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\left[R\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - S\frac{\partial y}{\partial x} + T\right]\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\,dx$$

$$+\Big|_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(P - \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}\right)\delta z\,dy + \Big|_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} R\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\,dy$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1} F\,\delta y\,dx + \Big|_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} F\,\delta x\,dy$$

$$+\Big|_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\left(S - R\frac{\partial y}{\partial x}\right)\delta z.$$

La variation d'une intégrale triple contenant les dérivées secondes d'une fonction u de x, y, z est extrêmement compliquée.

V. — Maxima et minima des intégrales multiples.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer que la variation d'une intégrale multiple portant sur une fonction F de u, v, w, ..., fonctions des variables x, y, z, ... de ces variables elles-mêmes et des dérivées de u, v, w, ..., se composera :

1° D'une intégrale sans signes de substitution ne contenant que les variations δu, δv, δw, ..., sous forme linéaire;

2° D'intégrales mêlées à des signes de substitution contenant les variations δu, δv, ..., et leurs dérivées, avec les valeurs de δx, δy, ...

Aux limites les coefficients de δu, δv, ..., dans la première intégrale seront nuls si l'on veut que la variation de

l'intégrale soit nulle; sans quoi, comme δu, δv, ..., sont arbitraires, on pourrait les choisir de signes contraires ou de mêmes signes que leurs multiplicateurs, annuler leurs valeurs aux limites, ainsi que les autres variations, et donner par suite à la variation de l'intégrale une valeur différente de zéro.

Il résulte de là que, pour rendre une intégrale multiple maxima ou minima, comme on doit évidemment annuler sa variation, il faudra d'abord annuler les coefficients de δu, δv, ..., dans l'intégrale qui ne contient pas de substitutions, et annuler ensuite tous les coefficients des variations arbitraires.

Pour faire comprendre l'esprit de cette méthode, dont le principe est dû à Sarrus [*Recherches sur le calcul des variations* (*Mémoires des savants étrangers,* t. X, 1848]; nous en ferons quelques applications.

VI. — Surface à aire minima.

PROBLÈME. — *De toutes les surfaces que l'on peut faire passer par un contour donné, trouver celle dont l'aire est la plus petite.*

L'intégrale à rendre minima, en appelant z l'ordonnée de la surface, x, y ses deux autres coordonnées et en posant, conformément à l'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

est ici

$$u = \int\int\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

et, le contour par lequel doit passer la surface étant donné, on aura simplement à appliquer la formule (p. 285)

$$\delta u = \int\int\left(z - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \ldots\right) dx\, dy\, \delta z,$$

ce qui donnera

$$\delta u = -\int\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

par suite, l'équation différentielle de la surface cherchée, sera

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=0$$

ou encore

$$(2)\qquad (1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0.$$

Si l'on se reporte à l'équation aux rayons de courbure principaux, on voit que *la surface à aire minima a ses deux rayons de courbure égaux et de signes contraires*. Nous allons essayer d'intégrer l'équation (1) : pour trouver l'équation de la surface minima en termes finis, on observe que l'équation (1) exprime que

$$(p\,dy-q\,dx)(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

est une différentielle exacte que nous appellerons du. Nous ferons alors

$$(3)\qquad \begin{cases} du=\dfrac{p\,dy-q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ dz=p\,dx+q\,dy;\end{cases}$$

supposons que par l'origine on mène une parallèle à la normale, sa longitude étant ψ et sa colatitude θ ; on aura

$$p(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}=\cos\psi\sin\theta,$$
$$q(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}=\sin\psi\sin\theta,$$
$$(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}=\cos\theta,$$

et les formules (3) deviendront

$$du=\sin\theta(\cos\psi\,dy-\sin\psi\,dx),$$
$$dz=\tang\theta(\cos\psi\,dx+\sin\psi\,dy),$$

ou encore

$$\frac{2\,du}{\sin\theta}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,dy\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right) - dx\left(e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}}\right),$$

$$\frac{2\,dz}{\operatorname{tang}\theta} = dx\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right) - dy\left(e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}.$$

En prenant alors $\xi = x + y\sqrt{-1}$, $\xi' = x - y\sqrt{-1}$, ces formules se simplifient et donnent

$$\frac{2\,du\sqrt{-1}}{\sin\theta} = d\xi\, e^{-\psi\sqrt{-1}} - d\xi'\, e^{+\psi\sqrt{-1}},$$

$$\frac{2\,dz}{\operatorname{tang}\theta} = d\xi\, e^{-\psi\sqrt{-1}} + d\xi'\, e^{\psi\sqrt{-1}},$$

Nous poserons

$$\eta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\, e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad \eta' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\, e^{-\psi\sqrt{-1}}, \qquad \eta\eta' = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

ces formules deviendront alors

$$du\sqrt{-1}(1 + \eta\eta') = \eta'\, d\xi - \eta\, d\xi',$$

$$dz(1 - \eta\eta') = \eta'\, d\xi + \eta\, d\xi';$$

et en posant

$$\zeta = z + u\sqrt{-1}, \qquad \zeta' = z - u\sqrt{-1},$$

on aura

$$d\zeta - \eta\eta'\, d\zeta' = 2\eta'\, d\xi,$$

$$d\zeta' - \eta\eta'\, d\zeta = 2\eta\, d\xi';$$

on tire de là

$$(4)\qquad \begin{cases} 2\,d\xi = \dfrac{d\zeta}{\eta'} - \eta\, d\zeta', \\[2ex] 2\,d\xi' = \dfrac{d\zeta'}{\eta} - \eta'\, d\zeta. \end{cases}$$

$d\xi$ et $d\xi'$ devant être des différentielles exactes, on a

$$\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\dfrac{1}{\eta'}}{\partial\zeta'}, \qquad \frac{\partial\eta'}{\partial\zeta'} = -\frac{\partial\dfrac{1}{\eta}}{\partial\zeta},$$

ou

$$\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} = \frac{1}{\eta'^2}\frac{\partial\eta'}{\partial\zeta'}, \qquad \frac{\partial\eta'}{\partial\zeta'} = \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial\zeta};$$

on en tire

$$\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\frac{\partial \eta'}{\partial \zeta'} = \frac{1}{\eta^2\eta'^2}\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\frac{\partial \eta'}{\partial \zeta}.$$

Comme $\eta\eta' = \text{tang}^2\frac{1}{2}\theta$, qui n'est pas égal à un, on a $\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = 0$; donc η est fonction de ζ' et η' est fonction de η. Ainsi

$$\zeta = 2f'(\eta'), \qquad \zeta' = 2f(\eta);$$

on tire de là

$$(5) \qquad z = f(\eta) + f'(\eta'),$$

puis (4) devient

$$dx + dy\sqrt{-1} = \frac{1}{\eta'}\frac{df'}{d\eta'}d\eta' - \eta\frac{df}{d\eta}d\eta,$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = \frac{1}{\eta}\frac{df}{d\eta}d\eta - \eta'\frac{df'}{d\eta'}d\eta',$$

ou bien

$$(6) \quad \begin{cases} 2\,dx = \left(\frac{1}{\eta'} - \eta'\right)\frac{df'}{d\eta'}d\eta' + \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)\frac{df}{d\eta}d\eta, \\ 2\,dy\sqrt{-1} = \left(\frac{1}{\eta'} + \eta'\right)\frac{df'}{d\eta'}d\eta' - \left(\frac{1}{\eta} + \eta\right)\frac{df}{d\eta}d\eta. \end{cases}$$

Les formules (5) et (6) font connaître x, y, z au moyen des deux paramètres $\eta = \text{tang}\frac{\theta}{2}e^{\psi\sqrt{-1}}$ et $\eta' = \text{tang}\frac{\theta}{2}e^{-\psi\sqrt{-1}}$. Si l'on suppose $\frac{df'}{d\eta'} = a'$, $\frac{df}{d\eta} = a$, a et a' désignant des constantes, on aura

$$z = a\eta + a'\eta' + \text{const.},$$
$$2x = a'\left(\log\eta' - \frac{\eta'^2}{2}\right) + a\left(\log\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) + \text{const.},$$
$$\sqrt{-1}\,2y = a'\left(\log\eta' + \frac{\eta'^2}{2}\right) - a\left(\log\eta + \frac{\eta^2}{2}\right) + \text{const.}$$

On peut choisir nulles les constantes d'intégration, cela ne fait que transformer les coordonnées.

On obtient une solution plus intéressante en prenant

$$f(\eta) = a \log \eta, \qquad f'(\eta') = a' \log \eta';$$

alors

$$z = a \log \eta + a' \log \eta',$$

$$2x = -\frac{a'}{\eta'} - \frac{a}{\eta} - a'\eta' - a\eta,$$

$$2y\sqrt{-1} = -\frac{a'}{\eta'} + \frac{a}{\eta} + a'\eta' - a\eta.$$

Remplaçons η par $\tang\frac{\theta}{2}e^{\psi\sqrt{-1}}$, η' par $\tang\frac{\theta}{2}e^{-\psi\sqrt{-1}}$ et a par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, a' par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; nous aurons

$$(7)\quad \begin{cases} z = 2\alpha \log \tang\frac{\theta}{2} - 2\beta\psi, \\ x = -\alpha\cot\frac{\theta}{2}\cos\psi + \beta\cot\frac{\theta}{2}\sin\psi - \alpha\tang\frac{\theta}{2}\cos\psi + \beta\tang\frac{\theta}{2}\sin\psi, \\ y = -\alpha\cot\frac{\theta}{2}\sin\psi + \beta\cot\frac{\theta}{2}\cos\psi - \alpha\tang\frac{\theta}{2}\sin\psi + \beta\tang\frac{\theta}{2}\cos\psi. \end{cases}$$

Prenons $\beta = 0$: on aura

$$(8)\quad \begin{cases} z = 2\alpha \log \tang\frac{\theta}{2}, \\ x = -\alpha\cos\psi\left(\tang\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right), \\ y = -\alpha\sin\psi\left(\tang\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right); \end{cases}$$

par suite

$$x^2 + y^2 = \alpha^2\left(\tang\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

et, en éliminant θ,

$$x^2 + y^2 = \alpha^2\left(e^{\frac{z}{2\alpha}} + e^{-\frac{z}{2\alpha}}\right)^2,$$

c'est l'équation d'une surface de révolution qui a pour méridien

$$x = 2\alpha\,\frac{e^{\frac{z}{2\alpha}} + e^{-\frac{z}{2\alpha}}}{2}.$$

Ainsi, *parmi les surfaces à aire minima on trouve la caténoïde ou surface engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base.*

Si dans (7) on fait $\alpha = 0$, on trouve des expressions de la forme suivante pour x, y, z :

$$\begin{aligned} z &= m\psi, \\ x &= r\cos(\psi - p), \\ y &= r\sin(\psi - p); \end{aligned}$$

r et p désignant des constantes, on peut prendre $p = 0$, ce qui revient à faire tourner l'axe des x et l'axe des y d'un angle p; l'élimination de r et de ψ donne alors

$$z = m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

ou en coordonnées semi-polaires $z = m\omega$. C'est l'équation de l'hélicoïde gauche ou surface de la vis à filet carré.

On a beaucoup écrit sur les surfaces à aire minima, et l'intégration de leur équation a exercé la sagacité d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous citerons : Monge (Géométrie analytique) qui paraît être le premier qui se soit occupé de la question; sa solution a une forme symbolique qui la rend impropre aux applications; M. O. Bonnet qui a donné une méthode analogue à celle que nous venons de développer, plus directe peut-être, mais moins simple; Riemann, MM. Catalan, Sophus Lie, Enneper, J. Serret, etc.; enfin, récemment, M. Ribaucour a publié, sur le sujet qui nous occupe, un Mémoire étendu couronné par l'Académie de Belgique, et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir. Nous donnerons dans le tome VII une autre méthode pour parvenir à l'équation de la surface minima, qui nous permettra de trouver toutes les surfaces minima algébriques.

M. Michael Roberts (t. XV du *Journal de Liouville*) donne les équations suivantes pour les équations d'une sur-

face minima :

$$x\sqrt{-1} = \cos\lambda + \cos\mu,$$
$$k'y\sqrt{-1} = \sin\lambda + \sin\mu,$$
$$k'z = \int\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}\,d\lambda + \int\sqrt{1-k^2\cos^2\mu}\,d\mu.$$
$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Ces formules se réduisent facilement aux fonctions elliptiques, et, si l'on pose $\sin\lambda = \operatorname{sn} u$, $\sin\mu = \operatorname{sn} v$, on a

$$k'z = u + v + Z(u) + Z(v).$$

VII. — Surface minima limitant un volume donné.

La recherche de la surface minima limitant un volume donné revient à la recherche du minimum de l'intégrale

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

sachant que

$$\iint z\,dx\,dy$$

est constant, ou bien au minimum absolu de

$$(1) \qquad u = \iint \left(\sqrt{1+p^2+q^2} + \lambda z\right) dx\,dy.$$

Faisons varier cette intégrale : nous aurons

$$\begin{aligned}\delta u = &\iint \left(\lambda - \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\delta z\,dx\,dy \\ &+ \int \Big| \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\delta z\,dx \\ &+ \Big|\int \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z\,dy + \int\Big| F\,\delta y\,dx + \Big|\int F\,\delta x\,dy,\end{aligned}$$

F désignant pour abréger la quantité placée sous le signe d'intégration dans (1).

Quelles que soient les conditions aux limites, l'équation différentielle de la surface minima sera

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

λ désignant une constante; cette équation peut s'écrire

$$\lambda = \frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

elle exprime que la courbure moyenne de la surface cherchée est constante : son intégration complète n'a pas encore été effectuée.

VIII. — Principe de Dirichlet.

Si l'on admet, avec Dirichlet et avec Riemann, qu'il existe une fonction u capable de rendre l'intégrale

$$(1) \qquad V = \int\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz$$

minima, cette intégrale étant prise à l'intérieur d'un volume donné W, et de prendre sur la surface qui limite ce volume des valeurs données, tout en restant finie ainsi que ses dérivées à l'intérieur de W, il est facile de prouver que cette fonction est harmonique (p. 256), c'est-à-dire qu'elle satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0.$$

En effet de (1) on tire

$$\delta V = 2\int\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\delta\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\delta\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

et, en intégrant par parties en observant que $\delta u = 0$ à la surface,

$$\frac{1}{2}\,\delta V = -\int\int\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\delta u\,dx\,dy\,dz,$$

et le minimum aura bien lieu pour $\Delta_2 u = 0$.

Le principe de Dirichlet admis, il en résulte qu'*il existe une fonction harmonique à l'intérieur d'un volume donné prenant sur la surface qui limite ce volume des valeurs données.*

Il n'en existe qu'une. En effet, s'il en existait deux, on pourrait les représenter par u et par $u+\omega$, et il est clair que l'on aurait

$$\Delta_2 u = 0, \qquad \Delta_2(u+\omega) = 0, \qquad \Delta_2\omega = 0,$$

et ω serait nul sur la surface limitant le volume donné W. Ceci posé, le théorème de Green démontré (t. III, p. 189) donne

$$\begin{aligned}\iiint \omega\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz \\ = \iint \omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\,dy\,dz + \iint \omega\frac{\partial\omega}{\partial y}\,dx\,dz + \iint \omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\,dx\,dy \\ -\iiint\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Le premier membre de cette formule est nul, ω est nul sur la surface qui limite W; on a donc

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial z} = 0,$$

ou que si ω est constant. Or il est nul sur la surface qui limite W; donc il est identiquement nul et u est la seule fonction harmonique dans l'intérieur de W, prenant des valeurs données sur la surface qui limite ce volume.

IX. — Application du principe de Dirichlet.

Le principe de Dirichlet a de nombreuses applications à la Physique mathématique : nous indiquerons seulement ici

une seule application relative au changement de variables. Supposons que l'on désire substituer dans l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0$$

aux variables x, y, z de nouvelles variables α, β, γ : on observera que (1) exprime que l'intégrale

$$(2) \qquad \delta \iiint \Delta_1 u \, dx \, dy \, dz,$$

où $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ est nulle ; alors, au lieu de faire le changement de variable dans $\Delta_2 u$, on le fera dans $\Delta_1 u$ et l'on exprimera que l'intégrale (2) est nulle, en faisant usage des nouvelles variables.

Le calcul est fort simple quand on a, entre les anciennes et les nouvelles variables, les relations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

et, par suite,

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \Delta_1 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 \Delta_1 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right)^2 \Delta_1 \gamma.$$

Si l'on pose alors

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)},$$

l'expression (2) devient

$$\delta \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \Delta_1 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 \Delta_1 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right)^2 \Delta_1 \gamma \right] D \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma ;$$

en l'égalant à zéro et en effectuant l'opération δ, on trouve

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\Delta_1 \alpha . D \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\Delta_1 \beta . D \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\Delta_1 \gamma . D \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) = 0.$$

Si, par exemple, le changement de variables consiste en une transformation de coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires et si l'on a

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta,$$

on a

$$D = r^2\sin\theta,$$

et la formule (4) devient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) = 0$$

ou

$$(a) \qquad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} = 0,$$

X. — Sur les fonctions sphériques.

La fonction $u = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ satisfait, comme il est facile de le voir, à l'équation $\Delta_2 u = 0$; la vérification de ce fait ne présente aucune difficulté. Si l'on pose

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta,$$
$$x' = r'\sin\theta'\cos\psi', \qquad y' = r'\sin\theta'\sin\psi', \qquad z' = r'\cos\theta',$$

on aura

$$(1) \quad u = \left[r^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\psi-\psi'}) + r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

et u satisfera à l'équation (a) du paragraphe précédent, à savoir

$$(2) \qquad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} = 0,$$

et la fonction u tirée de (1) satisfera à l'équation (2). Supposons $r = 1$, $r' < 1$; u se développera en série convergente comme il suit :

$$(3) \qquad u = P_0 + P_1 r' + P_2 r'^2 + \ldots + P_m r'^m + \ldots,$$

P_n désignant ce que devient le polynôme X_n de Legendre (t. V, p. 187) quand on y remplace x par

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Tirant u de (3) pour le porter dans (2), en observant que le coefficient de r'^m doit être nul dans la résultante, on a

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 P_m}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial P_m}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 P_m}{\partial\psi^2} + m(m+1)P_m = 0.$$

P_m est une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$ et $\cos\theta$; mais ce n'est pas la seule fonction entière de ces quantités satisfaisant à l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \cos\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} + m(m+1)U = 0.$$

On appelle *fonction sphérique* du degré m toute fonction homogène, entière et de degré m des quantités

$$\cos\theta,\ \sin\theta\cos\psi,\ \sin\theta\sin\psi$$

satisfaisant à l'équation (5). P_m est une fonction sphérique du degré m.

Il existe $2m+1$ *fonctions sphériques distinctes de degré* m. En effet, une fonction sphérique de degré m est une fonction homogène de x, y, z, dans laquelle on suppose $r = 1$, et qui satisfait à $\Delta_2 u = 0$. Si l'on écrit qu'une fonction semblable satisfait à $\Delta_2 u = 0$, on aura à égaler à zéro les coefficients d'une fonction homogène de degré $m - 2$, ce qui donnera $\frac{(m-1)m}{2}$ équations entre $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ coefficients; la fonction sphérique ne contiendra donc plus que

$$\frac{-(m-1)m + (m+1)(m+2)}{2} = 2m - 1$$

coefficients arbitraires. Il est bon d'observer que, si

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0, \qquad (\alpha x + \beta y + z)^m$$

satisfait à $\Delta_2 u = 0$ et $(\alpha\sin\theta\cos\psi + \beta\sin\theta\sin\psi + \cos\theta)^m$

est une fonction sphérique du degré m. Une somme de $2m+1$ semblables fonctions sera la fonction sphérique la plus générale.

XI. — Propriétés des fonctions sphériques.

Rappelons que le théorème de Green (t. III, p. 189) conduit à la formule

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\\ &\quad=\iint v\,\frac{du}{dx}\,dy\,dz+\iint v\,\frac{du}{dy}\,dx\,dz+\iint v\,\frac{du}{dz}\,dx\,dy,\end{aligned}\right.$$

si l'on a $\Delta_2 u = 0$. L'intégrale triple est relative à un volume W limité par une surface S et les intégrales doubles sont relatives à cette surface S ; la fonction v est d'ailleurs quelconque (u et v, bien entendu, sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans le volume W).

Désignons par α, β, γ les angles que la normale extérieure à la surface S en x, y, z fait avec les axes de coordonnées. Soit ∂n un déplacement effectué dans le sens de cette normale ; on aura

$$\frac{\partial u}{\partial n}\cos\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\cos\beta=\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\cos\gamma=\frac{\partial u}{\partial z},$$

et, en appelant $d\mathrm{S}$ l'élément de surface S,

$$dz\,dy=d\mathrm{S}\cos\alpha,\qquad dx\,dz=d\mathrm{S}\cos\beta,\qquad dy\,dx=d\mathrm{S}\cos\gamma,$$

la formule (a) pourra alors s'écrire

$$(b)\quad \iiint\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\mathrm{S},$$

et l'intégrale double devra être étendue à toute la surface S qui limite le volume W.

Appliquons maintenant la formule (b) en prenant pour surface S une sphère de rayon r contenant dans son intérieur le point (x', y', z') et soit

$$u = r^m \mathrm{Y}_m,$$

Y_m désignant une fonction sphérique d'ordre m; nous aurons

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = mr^{m-1} Y_m.$$

D'un autre côté, soit

$$v = \left[r^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\psi - \psi'}) + r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{r} P_0 + \frac{r'}{r^2} P_1 + \ldots + \frac{r'^m}{r^{m+1}} P_m + \ldots;$$

donc

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{P_0}{r^2} - \frac{2}{r^3} r' P_1 - \ldots - \frac{(m+1) r'^m}{r^{m+2}} P_m - \ldots,$$

la formule (b), en observant que

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

devient alors

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{(m+1\,P_0)}{r} + \frac{(m+2)P_1 r'}{r^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2m+1}{r^{m+1}} r'^m P_m + \ldots\right] Y_m r^{m+1} \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 4\pi r'^m Y'_m,$$

Y'_m désignant ce que devient Y en $x'y'z'$. En supposant $r = 1$ et en égalant les coefficients des mêmes puissances de r' dans les deux membres, on trouve les deux propriétés fondamentales des fonctions Y_m, à savoir

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{m'} Y_m \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 0,$$

$$(11) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_m Y_m \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{4\pi}{2m+1} Y'_m,$$

et, en particulier, en prenant $Y_m = P_m$ et en observant que $P_m = 1$ pour $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{m'} P_m \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \begin{cases} 0 \text{ pour } m' \gtrless m \\ \dfrac{4\pi}{2m+1} \text{ pour } m' = m. \end{cases}$$

XII. — Développement en série de fonctions sphériques.

Si une fonction $f(\theta, \psi)$ est développable en une suite limitée ou illimitée de fonctions sphériques, on aura

$$f(\theta, \psi) = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots;$$

si nous multiplions les deux membres de cette formule par $P_n \sin\theta \, d\theta \, d\psi$ et si nous intégrons de o à π par rapport à θ de o à 2π par rapport à ψ, nous aurons, en vertu de (10) et (11),

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n f(\theta, \psi) \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n;$$

d'où, en changeant θ en θ', ψ en ψ' et *vice versa*,

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi') P_n \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'.$$

Quant à P_n il est évidemment symétrique en θ, θ' et ψ, ψ'. Ainsi, quand $f(\theta, \psi)$ est développable en une suite de fonctions sphériques, il ne l'est que d'une seule manière.

Si, dans la formule

$$f(x) = X_0 \int_{-1}^{+1} X_0 f(x) \, dx + \ldots + \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{+1} X_n f(x) \, dx + \ldots$$

démontrée p. 197, t. V, on fait $x = \cos\gamma$, et, si l'on désigne par Γ_n ce que devient alors X_n, on a

$$f(\cos\gamma) = \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Gamma_n \int_0^{\pi} f(\cos\gamma) \Gamma_n \sin\gamma \, d\gamma$$

ou, en remplaçant $f(\cos\gamma)$ par $\varphi(\gamma)$ et γ par γ' sous le signe $\int$,

$$\varphi(\gamma) = \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Gamma_n \int_0^{\pi} \Gamma_n \varphi(\gamma') \sin\gamma' \, d\gamma';$$

faisant enfin $\gamma = 0$ et observant que Γ_n pour $\gamma = 0$ est égal à

X_n pour $x = 1$, c'est-à-dire est égal à un, on a

$$(12)\qquad \varphi(0) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \Gamma'_n \varphi(\gamma') \sin\gamma' \, d\gamma'.$$

Soient maintenant γ et ψ' deux coordonnées sphériques, et $F(\gamma, \psi')$ une fonction ayant, en chaque point γ, ψ' de la sphère de rayon un, une valeur bien déterminée : alors $F(0, \psi')$ aura une valeur bien déterminée, indépendante de ψ'; car 0 et ψ' sont les coordonnées du pôle nord de la sphère, et ψ' y est indéterminé. Posons

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \psi') \, d\psi',$$

et appliquons à cette fonction la formule (12); nous aurons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(0, \psi') \, d\psi' = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Gamma'_n F(\gamma', \psi') \, d\psi' \sin\gamma' \, d\gamma'.$$

Le premier membre de cette équation est indépendant de ψ': sa valeur est donc $F(0, \psi')$, où ψ' est arbitraire, et, en désignant par $d\sigma$ l'élément de surface sphérique $d\psi' \sin\gamma' \, d\gamma'$, la formule précédente revient à celle-ci

$$F(0, \psi') = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Gamma'_n F(\gamma', \psi') \, d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue à toute la surface de la sphère. Cette formule peut s'écrire autrement : soit N le pôle nord de la sphère, M un point quelconque de coordonnées γ', ψ'. Soient F_M la valeur de F au point M ; $X_n(x)$ la fonction de Legendre ; on pourra l'écrire

$$F_N = \sum \frac{2n+1}{4\pi} \iint X_n(\cos MN) F_M \, d\sigma_M.$$

Changeons de coordonnées et prenons un nouveau pôle o : soient θ, ψ les coordonnées du pôle N dans le nouveau système

de coordonnées, et θ', ψ' celles de M; on a

$$F(\theta, \psi) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} X_n[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')] \times F(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi'$$

ou, d'après la définition même de la fonction P_n,

$$F(\theta, \psi) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n F(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi'.$$

C'est la formule que nous voulions établir; elle est due à Laplace; la première démonstration rigoureuse que l'on en ait donnée est de Lejeune-Dirichlet (*Crelle,* t. 4).

XIII. — Intégration de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ dans quelques cas particuliers.

Nous allons nous proposer d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

de manière que la fonction u prenne des valeurs données en chaque point d'une sphère de rayon R dont nous mettrons le centre à l'origine.

Soient r, θ, ψ les coordonnées polaires du point (x, y, z); Y_n désignant une fonction sphérique, $r^n Y_n$ sera une solution de l'équation proposée, et, en désignant par A_1, A_2, ... des constantes,

$$A_0 Y_0 + A_1 r Y_1 + \ldots + A_n r^n Y_n + \ldots$$

ou simplement

$$Y_0 + \frac{r}{R} Y_1 + \ldots + \frac{r^n}{R^n} Y_n + \ldots$$

sera encore une solution de l'équation proposée; il ne reste

plus qu'à déterminer Y_0, Y_1, ..., de telle sorte que, quand on fera $r = R$, la suite précédente, ou

$$Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots,$$

se réduise à une fonction donnée $f(\theta, \psi)$; pour cela il suffit de prendre, en vertu de la formule établie au paragraphe précédent,

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n f(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'.$$

La solution cherchée est donc

$$u = \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{r^n}{R^n} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'.$$

Cette solution remarquable est de Laplace, et c'est la seule qui reste finie à l'intérieur de la sphère.

XIV. — Quelques lemmes.

Avant de faire une dernière application des principes exposés dans ce Livre, nous allons établir une formule qui va nous être utile.

Un point dans l'espace peut être déterminé par l'intersection de trois surfaces homofocales du second degré (p. 321, t. II) :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1.$$

Quand on se donne les paramètres λ, μ, ν, les surfaces précédentes sont déterminées et elles fournissent un point (x, y, z); réciproquement, quand on se donne x, y, z, λ, μ, ν sont déterminées; aussi λ, μ, ν jouent le rôle de coordonnées

et peuvent servir à déterminer un point dans l'espace : ce sont les *coordonnées elliptiques* de ce point.

On a d'ailleurs trouvé (p. 323, t. II),

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Si l'on forme la quantité

$$\Delta_1\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2,$$

on trouve

$$\Delta_1\lambda = \frac{4(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)},$$

$$\Delta_1\mu = \frac{4(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)},$$

$$\Delta_1\nu = \frac{4(\nu+a^2)(\nu+b^2)(\nu+c^2)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)},$$

et

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \mu, \nu)} = D = \begin{vmatrix} \frac{x}{2(a^2+\lambda)} & \frac{x}{2(a^2+\mu)} & \frac{x}{2(a^2+\nu)} \\ \frac{y}{2(b^2+\lambda)} & \frac{y}{2(b^2+\mu)} & \frac{y}{2(b^2+\nu)} \\ \frac{z}{2(c^2+\lambda)} & \frac{z}{2(c^2+\mu)} & \frac{z}{2(c^2+\nu)} \end{vmatrix}$$

ou

$$D = \frac{xyz}{8}\,\frac{(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)},$$

en posant

$$f(u) = (u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)$$

et, par suite,

$$D = \frac{1}{8}\,\frac{(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}.$$

Nous pouvons alors former avec les variables λ, μ, ν l'équation $\Delta_2 u = 0$ ou l'équation (4) du § IX (p. 295), qui devient ici

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\mu-\nu)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{f(\mu)f(\nu)}}\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right]+\ldots=0$$

ou

$$(\mu-\nu)\frac{f'(\lambda)}{2\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+(\mu-\nu)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{f(\mu)f(\nu)}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}+\ldots=0.$$

Posons

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=\frac{1}{\sqrt{f(\lambda)}},\qquad \frac{\partial\beta}{\partial\mu}=\frac{1}{\sqrt{f(\mu)}},\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}=\frac{1}{\sqrt{f(\nu)}};$$

nous aurons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda}\sqrt{f(\lambda)}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}f(\lambda)+\frac{\partial u}{\partial\lambda}\,\frac{f'(\lambda)}{2},$$

et l'équation précédente pourra s'écrire

$$(\mu-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+(\nu-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+(\lambda-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2}=0.$$

Nous aurons encore besoin plus loin de savoir faire le changement de variable suivant

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=0;$$

ce sont les équations de trois surfaces orthogonales. On en tire

$$x=r\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},$$

$$y=r\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}.$$

$$z=r\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}.$$

Calculons d'abord $dx^2 + dy^2 + dz^2$: nous aurons

$$2\frac{dx}{x} = 2\frac{dr}{r} + \frac{d\lambda}{a^2+\lambda} + \frac{d\mu}{a^2+\mu};$$

par suite

$$\begin{aligned}&4(dx^2+dy^2+dz^2)\\ &\quad = 4\,dr^2 + d\lambda^2\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right] + \ldots.\end{aligned}$$

Posant

$$f(p) = (p+a^2)(p+b^2)(p+c^2),$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} &= \Big|^{\rho=\lambda} -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho}\right)\\ &= \Big|^{\rho=\lambda} \frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)}{f(\rho)}\,\mathrm{A}\\ &= \mathrm{A}\,\frac{\lambda-\mu}{f(\lambda)}.\end{aligned}$$

A est une constante par rapport à ρ que l'on détermine en observant que, si l'on multiplie par ρ la quantité sous le signe $\frac{\partial}{\partial\rho}$, elle se réduit pour $\rho = \infty$ à r^2; donc $\mathrm{A} = r^2$ et l'on a alors

$$4(dx^2+dy^2+dz^2) = 4\,dr^2 + d\lambda^2\,\frac{r^2(\lambda-\mu)}{f(\lambda)} + d\mu^2\,\frac{r^2(\mu-\lambda)}{f(\mu)},$$

$$\Delta_1 r = 1, \qquad \Delta_1\lambda = \frac{4f(\lambda)}{r^2(\lambda-\mu)}, \qquad \Delta_1\mu = \frac{4f(\mu)}{r^2(\mu-\lambda)},$$

$$\mathrm{D} = \frac{r^2}{4}\,\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}.$$

L'équation ($\Delta_2 u = 0$) devient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^2}{4}\,\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\frac{f(\lambda)}{f(\mu)}}\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right] - \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{\frac{f(\mu)}{f(\lambda)}}\,\frac{\partial u}{\partial\mu}\right] = 0$$

ou bien encore

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{4}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) &+ \sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right]\\ &- \sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial u}{\partial\mu}\right] = 0.\end{aligned}$$

Les calculs que nous venons de faire seraient inextricables si l'on n'employait pas l'artifice que nous venons d'indiquer.

XV. — Problème de Lamé.

Lamé s'est proposé d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

de manière que la fonction u prenne sur la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1$$

des valeurs données et reste finie et continue, ainsi que ses dérivées à l'intérieur de cette surface.

Changeons de variables et prenons des coordonnées elliptiques (*voir* p. 303), définies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'équation (1) pourra s'écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{1}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\frac{1}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}\frac{1}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} = 0$$

ou encore

$$(\mu-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + (\nu-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (\lambda-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0, \tag{3}$$

en posant, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial \mu} = \frac{1}{\sqrt{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)}}, \\ &\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = \frac{1}{\sqrt{(\nu+a^2)(\nu+b^2)(\nu+c^2)}}; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et c'est l'équation (3) maintenant qu'il faut intégrer, de telle sorte que, pour $\nu = 0$, u se réduise à une fonction donnée $F(\lambda, \mu)$ ou $f(\alpha, \beta)$.

Essayons de satisfaire à l'équation (3) en posant

$$u = LMN,$$

L étant fonction de λ ou de α seul, M étant fonction de μ seul et N fonction de ν seul; on aura

$$\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2}(\mu-\nu)+\frac{1}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial\beta^2}(\nu-\lambda)+\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial\gamma^2}(\lambda-\mu)=0;$$

cette équation sera satisfaite en prenant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2} &= (g\lambda+h)L,\\ \frac{\partial^2 M}{\partial\beta^2} &= (g\mu+h)M,\\ \frac{\partial^2 N}{\partial\gamma^2} &= (g\nu+h)N, \end{aligned}\right.$$

et ces trois équations détermineront les fonctions L, M, N : nous supposerons g et h constants.

Occupons-nous spécialement d'une de ces équations, de la première par exemple; on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha^2}\\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\left(\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{A}{2}\lambda+\frac{B}{2}\right), \end{aligned}$$

formule où

$$A = a^2+b^2+c^2,\qquad B = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,\qquad C = a^2b^2c^2,$$

et la première équation devient

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}f(\lambda)+\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda}f'(\lambda)-L(g\lambda+h)=0,$$

où l'on a fait

$$f(\lambda)=(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2).$$

XVI. — Fonctions de Lamé.

Reprenons l'équation (6) du paragraphe précédent

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} f(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \lambda} f'(\lambda) - L(g\lambda + h) = 0$$

et cherchons la forme qu'il faudrait donner à g et à h pour faire acquérir à cette équation des solutions entières en λ. Supposons que n désigne le degré du polynôme L : le premier membre de (6) sera de degré $n+1$; pour que cette équation soit satisfaite, il faudra d'abord que les termes en λ^{n+1} soient nuls, ce qui exige que

$$n(n-1) + \frac{3}{2} n - g = 0,$$

où $g = \frac{n(2n+1)}{2}$. Remplaçons g par cette valeur dans (6) et employons maintenant le d pour désigner les dérivées ; λ étant dorénavant seule variable indépendante, cette équation (6) deviendra

$$(7) \qquad \frac{d^2 L}{d\lambda^2} f(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{dL}{d\lambda} f'(\lambda) - L\left[\frac{n(2n+1)}{2}\lambda + h\right] = 0.$$

Si l'on pose alors

$$L = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

et si l'on égale à zéro les coefficients des diverses puissances de λ, on aura $n+2$ équations, dont la première, identique, servirait à déterminer g et dont les autres servent à calculer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et h sans ambiguïté. Les polynômes L, que nous venons de définir, sont ce que l'on appelle les *polynômes de Lamé*.

Nous désignerons par $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les polynômes de Lamé correspondant aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ du nombre entier n et par $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les valeurs correspondantes de h ; nous aurons alors les formules

$$\frac{d^2 L_n}{d\lambda^2} f(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{dL_n}{d\lambda} f'(\lambda) - L_n\left[\frac{n(2n+1)}{2}\lambda + h_n\right] = 0,$$

$$\frac{d^2 L_m}{d\lambda^2} f(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{dL_m}{d\lambda} f'(\lambda) - L_m\left[\frac{m(2m+1)}{2}\lambda + h_m\right] = 0.$$

Multiplions la première par L_m, la seconde par L_n et retranchons : nous aurons

$$\left(L_m \frac{d^2 L_n}{d\lambda^2} - L_n \frac{d^2 L_m}{d\lambda^2}\right) f(\lambda) + \frac{1}{2}\left(L_m \frac{dL_n}{d\lambda} - L_n \frac{dL_m}{d\lambda}\right) f'(\lambda) - L_m L_n \left[\frac{n(2n+1)-m(2m+1)}{2}\lambda + h_n - h_m\right] = 0,$$

ce que l'on peut écrire en divisant par $\sqrt{f(\lambda)}$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\left(L_m \frac{dL_n}{d\lambda} - L_n \frac{dL_m}{d\lambda}\right)\right] = \frac{L_m L_n}{\sqrt{f(\lambda)}}\left[\lambda \frac{n(2n+1)-m(2m+1)}{2} + h_n - h_m\right].$$

Intégrons maintenant entre deux limites qui soient racines de $f(\lambda) = 0$: nous aurons

$$\int \frac{L_m L_n}{\sqrt{f(\lambda)}}\left[\frac{n(2n+1)}{2} - \frac{m(2m+1)}{2}\right]\lambda\, d\lambda + \int \frac{L_m L_n}{\sqrt{f(\lambda)}}(h_n - h_m)\, d\lambda = 0.$$

Changeons dans cette formule λ en μ ou en ν; nous aurons

$$\int \frac{M_m M_n}{\sqrt{f(\mu)}}\left[\frac{n(2n+1)}{2} - \frac{m(2m+1)}{2}\right]\mu\, d\mu + \int \frac{M_m M_n}{\sqrt{f(\mu)}}(h_n - h_m)\, d\mu = 0;$$

en multipliant en croix ces deux formules après avoir fait passer les seconds termes dans le second membre, il vient

$$(8) \qquad \iint \frac{L_m L_n M_m M_n}{\sqrt{f(\lambda) f(\mu)}}(\lambda - \mu)\, d\lambda\, d\mu = 0.$$

Cette propriété des fonctions de Lamé permet d'intégrer l'équation (1) ou (3); en effet, posons

$$u = \sum B_m L_m M_m N_m,$$

B_m désignant une constante ; cette valeur de u satisfait, quelles que soient les constantes B, à l'équation (3) pourvu que le second membre se compose d'un nombre limité de termes ou soit convergent. Si l'on veut que la fonction u se réduise à une fonction donnée $F(\lambda, \mu)$ de λ et μ pour $\nu = 0$, c'est-à-dire sur la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il faudra déterminer les B de telle sorte que l'on ait

$$F(\lambda, \mu) = \sum B_m L_m M_m N_m(0).$$

Tout se réduit donc à développer la fonction $F(\lambda, \mu)$ sous la forme $\sum A_m L_m M_m$. Or, si l'on pose

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m L_m M_m$$

et si l'on intègre les deux membres de cette formule après l'avoir multipliée par $\dfrac{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}{L_n M_n}(\lambda - \mu)\,d\lambda\,d\mu$, il vient, en vertu de (8),

$$\begin{aligned}\iint \frac{L_n M_n F(\lambda, \mu)}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}(\lambda - \mu)\,d\lambda\,d\mu \\ = A_n \iint \frac{L_n^2 M_n^2}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}(\lambda - \mu)\,d\lambda\,d\mu,\end{aligned}$$

d'où l'on tire A_m et, par suite, $B_m = \dfrac{A_m}{N_m(0)}$.

Cette solution est évidemment très élégante ; mais elle repose sur une hypothèse, à savoir la possibilité du développement d'une fonction arbitraire de λ et μ suivant les produits des fonctions L et M. Nous allons essayer de démontrer la possibilité de ce développement.

Si cette possibilité est établie, la solution précédente sera la seule qui reste finie à l'intérieur de l'ellipsoïde, en vertu du principe de Dirichlet.

XVII. — Complément de la théorie précédente.

Reprenons la formule (7) qui sert à définir la fonction L, à savoir

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2} f(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\lambda} f'(\lambda) = L\left[\frac{n(2n+1)}{2}\lambda + h\right],$$

et que l'on peut écrire

$$\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right] = L\left[\frac{n(2n+1)}{2}\lambda + h\right];$$

on aura de même

$$\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial M}{\partial\mu}\right] = M\left[\frac{n(2n+1)}{2}\mu + h\right];$$

on déduit de ces deux formules

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial LM}{\partial\lambda}\right] \\ &\quad -\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial LM}{\partial\mu}\right] = LM(\lambda-\mu)\,\frac{n(2n+1)}{2}. \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, si dans l'équation $\Delta_2 u = 0$ on effectue le changement de variable donné par les formules

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 0,$$

on trouve (p. 307)

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda-\mu)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{4}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\ &\quad = \sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right] - \sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\,\frac{\partial u}{\partial\mu}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons dans cette formule $u = r^{2n}\mathrm{Y}$, Y désignant une fonction de λ et μ seuls, on aura

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Y}(\lambda-\mu)\frac{n(2n+1)}{2} \\ &\quad = \sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\lambda}\right] - \sqrt{f(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\mu}\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est identique à (9); donc la fonction LM satisfait à cette équation (10); mais cette équation (10) est précisément l'équation à laquelle satisfait la fonction Y_m de Laplace. En effet, l'équation (10) est l'équation $\Delta_2 u$, dans laquelle, à la place de x, y, z, on a mis r, λ, μ ou, si l'on veut, celle que l'on obtiendrait en remplaçant x, y, z par r, θ, ψ, puis θ, ψ par λ, μ; (11) est donc bien l'équation d'une fonction de Laplace d'indice pair. Si donc LM est entier en

$$\cos\theta, \quad \sin\psi\sin\theta, \quad \cos\psi\sin\theta,$$

toute fonction de λ, μ sera développable en série de fonctions LM et les hypothèses du paragraphe précédent sur la possibilité du développement que nous avons employé seront justifiées; or LM est une fonction entière de degré pair de λ et μ et, comme on a

$$x = r\cos\psi\sin\theta = r\sqrt{\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

LM sera aussi une fonction entière de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, et $\sin\theta\cos\psi$. Ainsi se trouve justifiée la belle analyse de Lamé.

XVIII. — Surfaces isothermes.

Si l'on considère une fonction u satisfaisant à l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0$$

et si l'on égale cette fonction à une constante ε, on obtient une famille de surfaces que, pour des raisons tirées de la Physique,

on appelle surfaces isothermes; ε est alors le *paramètre thermométrique* de la famille. Voici quelques exemples de surfaces isothermes algébriques simples

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = \varepsilon,$$

$$ayz + bxz + cxy = \varepsilon.$$

Considérons une équation de la forme

$$(2) \qquad f(x, y, z, a) = 0,$$

et cherchons la condition pour qu'elle représente une famille de surfaces isothermes.

Il faut alors qu'une certaine fonction ε de la valeur de a tirée de (2) satisfasse à l'équation $\Delta_2 \varepsilon = 0$. Or on a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2};$$

donc

$$\Delta_2 \varepsilon = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a^2} \Delta_1 a + \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \Delta_2 a.$$

Pour que $\Delta_2 \varepsilon = 0$, il faut que

$$\frac{\Delta_2 a}{\Delta_1 a} = - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a^2} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial a};$$

or, le second membre étant fonction de a seul, le rapport $\frac{\Delta_2 a}{\Delta_1 a}$ doit être fonction de a seul; réciproquement, si ce rapport est fonction de a, en désignant cette fonction par A, on déterminera ε par la formule

$$A \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a^2} = 0,$$

et la surface sera isotherme, car on aura $\Delta_2 \varepsilon = 0$.

Pour trouver des systèmes isothermes, il faudra intégrer l'équation

$$\Delta_2 u = \Delta_1 u \, F(u),$$

F désignant une fonction arbitraire; changeons de variable

dans cette formule et prenons des coordonnées elliptiques; pour cela, reportons-nous à la formule (21) du tome I, p. 216; l'équation à intégrer deviendra, en adoptant les notations des paragraphes précédents,

$$\frac{8\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}{-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda)}\left[(\mu-\nu)\frac{f'(\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+(\mu-\nu)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}+\ldots\right]$$
$$=4F(u)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)^2\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+\ldots\right]$$

ou bien

$$(\mu-\nu)\left[f'(\lambda)\frac{\partial u}{\partial\lambda}+f(\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}\right]+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}F(u)\left[(\mu-\nu)f(\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)^2+\ldots\right].$$

On voit que cette équation est satisfaite en prenant u égal à une fonction de λ seul, de μ seul ou de ν seul, en sorte que les surfaces du second degré homofocales constituent des surfaces isothermes, ce que l'on peut vérifier directement.

On connaît un grand nombre de cylindres isothermes : les cylindres droits qui ont pour bases sur le plan des xy les courbes $X=0$, $Y=0$ telles que $X+Y\sqrt{-1}$ soit une fonction monogène de $x+y\sqrt{-1}$, par exemple, sont des cylindres isothermes. Les cylindres qui ont pour base les courbes d'égal module d'une fonction monogène sont également isothermes. Ainsi les cylindres qui ont pour bases des lemniscates homofocales sont isothermes.

XIX. — Variation d'une intégrale triple.

Nous terminerons ces considérations sur le calcul des variations par la recherche de la fonction u capable de rendre minima l'intégrale triple

$$V=\iiint\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les points intérieurs à une certaine surface S, et de prendre des valeurs données sur cette surface.

On a

$$\delta V = \iiint \frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

et, en intégrant par parties,

$$\delta V = -\iiint \delta u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx\, dy\, dz,$$

on aura la condition du minimum en égalant le coefficient de δu à zéro, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta u}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - (\Delta u)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \ldots \right] = 0$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \ldots - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \ldots = 0.$$

Si l'on se reporte à la page 438 du tome II, on voit que, pour exprimer que la surface $f =$ const. a ses deux rayons de courbure égaux et de signes contraires, il faut poser

$$\frac{\partial \Theta}{\partial f_{11}} + \frac{\partial \Theta}{\partial f_{22}} + \frac{\partial \Theta}{\partial f_{33}} = 0,$$

formule où Θ désigne le hessien de f bordé avec f_1, f_2, f_3. Cette équation développée donne

$$(f_2^2 + f_3^2) f_{11} + \ldots - 2 f_2 f_3 f_{23} - \ldots = 0,$$

c'est-à-dire, à la notation près, l'équation (1), ce qui montre que si la fonction u n'est pas une constante, quels que soient x, y, z, en l'égalant à une constante arbitraire, on obtiendra l'équation d'une surface ayant ses deux rayons de courbure en chaque point égaux et de signes contraires.

Pour déterminer la fonction u, il faudra intégrer l'équation (1), de manière que u prenne des valeurs données sur la surface S.

XX. — Variation de quelques intégrales multiples.

Problème I. — *Trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale suivante, où u est invariable aux limites*

$$V = \int\int \ldots \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} - u\right)^m dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

On a

$$\delta V = \int\int \ldots m\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots - u\right)^{m-1} \left(x_1 \delta \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots - \delta u\right) dx_1 \ldots$$

et, en intégrant par parties et en désignant

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} - u$$

par H,

$$\delta V = -\int\int \ldots \delta u . m\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 H^{m-1}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n H^{m-1}) + H^{m-1}\right] dx_1 \ldots,$$

on obtient le maximum ou le minimum cherché, en annulant le coefficient de δu, ce qui donne

$$(n+1) H^{m-1} + (m-1) H^{m-2} \sum x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ou

$$(1) \qquad \frac{n+1}{m-1}\left(\sum x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u\right) + \sum x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

(dans l'équation précédente, il est clair que sous le signe $\sum$ les coefficients des $x_i x_j$ ou $i \gtrless j$ doivent être censés doublés).

L'équation (1) est facile à intégrer : si, en effet, on pose $\frac{n+1}{m-1} = -\alpha$ et si l'on désigne par θ_k en général une fonction

homogène de degré k des variables $x_1, x_2, \ldots, x$ d'ailleurs arbitraire, on aura

$$u = \theta_1 + \theta_\alpha.$$

(Jellet, *Calcul des variations*.)

Problème II. — *Trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale*

$$V = \int\int r^m d\sigma[\alpha F_1(b, c) + \beta F_2(c, a) + \gamma F_3(a, b)],$$

dans laquelle r est le rayon vecteur d'une surface le long de laquelle on intègre; $d\sigma$ est l'élément de surface; a, b, c les cosinus directeurs du rayon r et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale. Les fonctions F_1, F_2, F_3 sont supposées homogènes. La surface est assujettie à passer par une courbe fermée fixe.

Si l'on pose $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$, en appelant x, y, z les coordonnées d'un point de la surface cherchée, on aura

$$V = \int\int r^m \left[p F_1\left(\frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) + q F_2\left(\frac{z}{r}, \frac{x}{r}\right) - F_3\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)\right] dx\,dy,$$

c'est-à-dire en observant que F_1, F_2, F_3 sont homogènes,

$$V = \int\int r^n [p F_1(y, z) + q F_2(z, x) - F_3(x, y)]\, dx\,dy;$$

n désignant un nombre égal à m ou différent de m suivant les cas, on a alors

$$\delta V = \int\int n r^{n-2} z\, \delta z (p F_1 + q F_2 - F_3)\, dx\,dy$$
$$+ \int\int r^n \left(\delta p\, F_1 + \delta q\, F_2 + p \frac{\partial F_1}{\partial z} \delta z + q \frac{\partial F_2}{\partial z} \delta z\right) dx\,dy.$$

En intégrant par parties et en égalant à zéro le coefficient

de δz sous le signe $\iint$, on trouve

$$nr^{n-2}z(pF_1+qF_2-F_3) \\ +r^n\left(p\frac{\partial F_1}{\partial z}+q\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(r^nF_1)-\frac{\partial}{\partial y}(r^nF_2)=0;$$

en développant les calculs indiqués le premier membre se réduit à zéro. On tombe sur une identité; cela prouve que notre intégrale est indépendante de la forme de la surface passant par la courbe donnée : elle n'est pas par conséquent susceptible de maximum ou de minimum.

Un cas particulier de la proposition que nous venons de trouver est celui d'une surface fermée : alors on trouve que

$$\iint r^2[\alpha(b^2+c^2)+\beta(a^2+c^2)+\gamma(b^2+c^2)]\,d\sigma=0$$

ou que

$$\iint[p(y^2+z^2)+q(x^2+z^2)-(y^2+x^2)]\,dx\,dy=0.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Toute fonction harmonique dans un certain domaine est développable dans ce domaine en une série de la forme

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

u_n désignant une fonction harmonique entière, homogène et de degré n. (Le théorème de Cauchy est un cas particulier de celui-ci.)

2. La thèse de M. Riquier contient une théorie très complète de la théorie des fonctions harmoniques à un nombre quelconque de variables. Un Mémoire de M. Poincaré (*American Journal of Mathematics,* vol. XII, n° 3) contient une théorie des équations que l'on rencontre en Physique mathématique et qui sont analogues à $\Delta_2 u=0$.

3. S'appuyer sur le résultat obtenu § XVII pour trouver, en coordonnées polaires ou semi-polaires, l'équation aux dérivées partielles de la surface minima.

4. Trouver la surface qui, passant par une courbe donnée, rend l'intégrale

$$\iint \sqrt{p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

minima, p et q désignant toujours $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. Si l'on applique la formule de Lagrange à l'équation

$$u - t\left[\left(x + \frac{au}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{bu}{2}\right)^2 - 1\right] = 0,$$

on trouve

$$[(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n \mathrm{U}_{mn},$$

$$\mathrm{U}_{mn} = \frac{1}{m!\,n!}\,\frac{1}{2^{m+n}}\,\frac{\partial^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)}{\partial x^m\, \partial y^n};$$

les polynômes U_{mn} satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1 - x^2) - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1 - y^2)$$
$$- 3x\frac{\partial u}{\partial x} - 3y\frac{\partial u}{\partial y} + (m + n)(m + n + 2)u = 0;$$

le polynôme V_{mn}, défini par l'équation

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \sum a^m b^n \mathrm{V}_{mn},$$

satisfait à la même équation dont on a ainsi un grand nombre de solutions. Elle n'a pas d'intégrale intermédiaire : on a

$$\iint \mathrm{U}_{mn}\mathrm{U}_{pq}\, dx\, dy = 0,$$
$$\iint \mathrm{V}_{mn}\mathrm{V}_{pq}\, dx\, dy = 0,$$
$$\iint \mathrm{U}_{mn}\mathrm{V}_{mn}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m + n + 1}\,\frac{(m + n)!}{m!\,n!}.$$

Les intégrales sont prises dans le domaine défini par

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0. \qquad \text{(HERMITE.)}$$

6. Les U_{mn} se calculent en fonction linéaire des V_{mn} et *vice versa* (exercice précédent); généraliser.

CHAPITRE IX.

TRANSFORMATION DES FIGURES DANS L'ESPACE.

I. — Homographie.

Soient $\varphi(x', y', z')$, $\chi(x', y', z')$, $\psi(x', y', z')$ trois fonctions des coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point M'; x, y, z les coordonnées d'un point M. Si l'on pose

$$(1)\quad x = \varphi(x', y', z'), \qquad y = \chi(x', y', z'), \qquad z = \psi(x', y', z'),$$

lorsque le point $M'(x', y', z')$ décrira une certaine figure F', le point M décrira une autre figure correspondante F. Ces figures F et F' sont *transformées* l'une de l'autre par les formules (1). Nous ne ferons pas la théorie générale de la transformation des figures, et nous nous bornerons à l'étude de quelques cas simples.

On dit que les deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ engendrent des figures *homographiques* quand on a entre les coordonnées des points M et M', des relations de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{ax' + by' + cz' + d}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''}, \\ y &= \frac{a'x' + b'y' + c'z' + d'}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''}, \\ z &= \frac{a''x' + b''y' + c''z' + d''}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''}, \end{aligned}\right.$$

$a, b, c, \ldots, d'''$ désignant des constantes. Si l'on introduit deux variables t et t' pour rendre les formules homogènes, les formules de la transformation homographique (2) pour-

ront se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{x}{X'} = \frac{y}{Y'} = \frac{z}{Z'} = \frac{t}{T'},$$

X', Y', Z', T' désignant respectivement les fonctions linéaires $ax' + by' + cz' + dt'$, ..., $a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''t'$. Les formules (3) peuvent être résolues par rapport à x', y', z', t' et se transforment en

$$(4) \qquad \frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} = \frac{t''}{T},$$

X, Y, Z, T désignant des fonctions linéaires de x, y, z, t homogènes.

Il est clair que, si x, y, z, t, au lieu de désigner, ainsi que x', y', z', t', des coordonnées homogènes, désignaient des coordonnées tétraédriques, les formules (3) ou (4) seraient encore des formules de transformation homographiques ; et, en effet, x, y, z, t seraient des fonctions linéaires de trois coordonnées ordinaires ξ, η, ζ ; X', Y', Z' seraient également fonctions linéaires de trois coordonnées ordinaires ξ', η', ζ', et il est clair que l'on en déduit pour ξ, η, ζ des valeurs qui sont des fonctions rationnelles de ξ', η', ζ' dont les numérateurs et les dénominateurs sont du premier degré.

La formule

$$\frac{x}{X'} = \frac{y}{Y'} = \frac{z}{Z'} = \frac{t}{T'}$$

peut s'interpréter en disant que, pour construire une figure homographique d'une figure donnée, on peut rapporter la première figure F à un tétraèdre de référence et construire une figure F', qui, par rapport à un autre tétraèdre différent du premier, aurait les mêmes coordonnées que F par rapport au premier tétraèdre.

Voici maintenant les propriétés essentielles des figures homographiques :

1° *Les points à l'infini dans la figure* F *ont pour correspondants des points de la figure* F' *situés dans un même*

plan (qui peut dans certains cas être le plan de l'infini).

2° *Une transformation homographique n'altère pas le degré d'une ligne ou d'une surface.*

3° *A quatre points en ligne droite de l'une des figures correspondent quatre points en ligne droite de l'autre et dont le rapport anharmonique est le même.*

La démonstration est analogue à celle qui a été donnée en Géométrie plane.

4° *A deux points infiniment voisins d'une des figures correspondent deux points infiniment voisins de l'autre.*

5° *Une transformation homographique n'altère pas l'ordre du contact des lignes et des surfaces, non plus que leurs singularités.*

6° *Une transformation homographique n'altère pas la classe d'une ligne ou d'une surface.*

II. — De l'homologie.

Si l'on pose

$$x = \frac{x'}{\Theta}, \quad y = \frac{y'}{\Theta}, \quad z = \frac{z'}{\Theta}, \tag{1}$$

Θ désignant une fonction linéaire de x', y', z', les points x, y, z et x', y', z' décriront des figures *homologiques*. L'homologie est donc un cas particulier de l'homographie ; le plan $\Theta = 0$ de la figure x', y', z' a pour correspondant le plan de l'infini dans la figure x, y, z. Quant aux points situés dans le plan $\Theta = 1$, ils se correspondent à eux-mêmes, puisque pour $\Theta = 1$ on a $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Le point $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ se correspond d'ailleurs à lui-même aussi ; il n'y a du reste que ces points qui se correspondent à eux-mêmes, comme nous le constaterons tout à l'heure, en indiquant la construction géométrique des figures homologiques.

Le plan $\Theta = 1$ est le *plan d'homologie*, l'origine qui se correspond à elle-même est le *centre d'homologie*.

L'étude des figures homographiques ne se ramène pas à celle des figures homologiques, comme cela a lieu en Géométrie plane, ainsi qu'il est facile de le constater en déplaçant l'une des figures et en essayant de la faire coïncider avec une homologique de la seconde : on s'aperçoit ainsi que l'on n'a pas assez de paramètres à sa disposition pour effectuer la coïncidence.

Les formules de l'homologie (1) peuvent s'écrire

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \theta;$$

elles montrent qu'*un point et son correspondant sont en ligne droite avec le centre d'homologie.*

Une droite et la droite homologique rencontrent le plan d'homologie au même point.

Un plan et son homologique rencontrent le plan d'homologie suivant une même droite.

Soient M un point (x, y, z), et M' son correspondant (x', y', z'). Soient O le centre d'homologie, I le point où OMM' rencontre le plan d'homologie ; soient N un point différent de M, et N' son correspondant. Le rapport anharmonique des points O, M, I, N est égal à celui de leurs correspondants O, M', I, N' ; on a donc

$$\frac{\text{MO}}{\text{MI}} : \frac{\text{NO}}{\text{NI}} = \frac{\text{M'O}}{\text{M'I}} : \frac{\text{N'O}}{\text{N'I}} = \lambda,$$

λ désignant une constante ; donc on peut définir une figure homologique d'une figure donnée, par rapport à un centre O et un plan, une figure dont les points correspondent à ceux de la figure donnée, de telle sorte que, M étant un point de la figure donnée, M' son correspondant, on ait, en appelant I le point où MO rencontre le plan,

$$\frac{\text{MO}}{\text{MI}} : \frac{\text{M'O}}{\text{M'I}} = \lambda,$$

λ désignant une constante. Si le plan en question a pour

équation $z = h$ et si le point O est pris pour origine, on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \lambda \frac{z - h}{z' - h}.$$

L'homographie et l'homologie ont permis à Poncelet et à Chasles de généraliser un grand nombre de propriétés de la sphère et d'en déduire des propriétés des surfaces du second ordre que l'on peut considérer comme des transformées de la sphère; mais, pour l'étude de ces transformations, nous renverrons aux Ouvrages de ces auteurs ou aux Traités spéciaux de Géométrie.

III. — Figures corrélatives.

Considérons les formules

$$x = \frac{ax' + by' + cz' + d}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''},$$
$$y = \frac{a'x' + b'y' + c'z' + d'}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''},$$
$$z = \frac{a''x' + b''y' + c''z' + d''}{a'''x' + b'''y' + c'''z' + d'''},$$

et supposons que x', y', z' représentent, non plus les coordonnées d'un point, mais les coordonnées d'un plan, quand le point x, y, z décrira un lieu d'un certain degré sur le plan, x', y', z' enveloppera une surface de la classe m, de sorte que les formules précédentes établiront entre deux figures un certain mode de correspondance que l'on a appelé corrélation et sur lequel nous ne nous arrêterons pas autrement que pour signaler les figures polaires réciproques comme cas particulier des figures corrélatives (*voir* t. II, p. 279).

Proposons-nous, par exemple, étant données les coordonnées d'un point (x, y, z) d'une surface, de calculer les coordonnées du point correspondant de la transformée par polaires réciproques. Soit

(1) $$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de la surface que l'on transforme, $f=0$ désignant la surface du second ordre transformatrice; le plan tangent à (1) au point (x, y, z) a pour équation

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}+T\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0;$$

son pôle x_1, y_1, z_1 est donné par les formules

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Si, par exemple, $f=x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2$, on aura

$$x_1:\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y_1:\frac{\partial\varphi}{\partial y}=z_1:\frac{\partial\varphi}{\partial z}=t_1:\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

ou, en supposant $\varphi=z-\theta(x, y)$ et en posant $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial x}{\partial y}$,

$$\frac{x_1}{p}=\frac{y_1}{q}=\frac{z_1}{-1}=\frac{1}{z-px-qy}.$$

Si l'on prend $f=x_1^2+y_1^2-2z_1$, on a

$$\frac{x_1}{p}=\frac{y_1}{q}=\frac{-1}{-1}=\frac{z_1}{z-px-qy}.$$

La transformation de Legendre dont il a été question (t. I, p. 211) et qui a été utilisée par Monge pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la surface minima a pour but de substituer aux coordonnées d'une surface les coordonnées de sa transformée par polaires réciproques relativement au paraboloïde $x^2+y^2=2z$.

Il resterait, pour compléter ces théories à peine ébauchées, à faire pour les surfaces ce que nous avons fait pour les lignes, mais ce travail présente de grandes difficultés qui sont loin d'être vaincues, et qui d'ailleurs ne présentent pas pour nous le même intérêt. La théorie de la transformation des courbes planes contenait en effet celle des fonctions abéliennes.

NOTES.

NOTE SUR LA MÉTHODE D'AMPÈRE.

La méthode que nous avons indiquée pour intégrer l'équation (p. 210)

$$Rr + Ss + Tt + M(rt - s^2) + N = 0$$

et que nous avons développée pour le cas où $M \gtrless 0$ est tout à fait générale : elle s'appliquerait à des équations de la forme

$$(1) \qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0,$$

mais elle conduit alors à des calculs inextricables. Ainsi, en admettant l'existence d'une intégrale intermédiaire

$$f(x, y, z, p, q) = a,$$

on aurait, comme dans le texte,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s = 0,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t = 0.$$

Si l'on élimine r et t, par exemple, entre (1) et ces deux équations, on aura une équation

$$\Phi(s) = 0.$$

Si cette équation peut se mettre sous forme entière, en égalant les coefficients des diverses puissances de s à zéro, on obtiendra des équations simultanées aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire la fonction f. On voit que cette méthode, intéressante en théorie, sera d'un usage à peu près nul en pratique.

NOTE SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES.

Supposons que l'on donne les équations différentielles d'une famille de courbes, à savoir

$$(1)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

où X, Y, Z désignent des fonctions de x, y, z. Les intégrales des équations (1) renferment deux constantes arbitraires et, par suite, les équations (1) représentent des courbes, telles qu'il en passe une par un point quelconque de l'espace, ou du moins, il en passe un nombre fini ou infini ne formant pas une surface. *Proposons-nous de trouver des surfaces normales en chacun de leurs points aux courbes représentées par la formule* (1).

Soit δx, δy, δz un déplacement effectué sur la surface normale, si elle existe; on devra avoir

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

et, par suite, en vertu de (1),

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Y\,\delta z = 0.$$

Cette équation, que l'on peut aussi écrire, en remplaçant le δ par un d,

$$(2)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

est aux différentielles totales; on en conclut : 1° que la surface normale cherchée n'existe pas toujours; 2° que, pour que cette surface existe, il faudra que l'on ait

$$(3)\qquad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0;$$

3° si cette relation a lieu identiquement, il existera une infinité de surfaces orthogonales à notre système de courbes : ces surfaces fourniront une famille représentée par l'intégrale complète de (2); 4° enfin, si la valeur de z tirée de (3) satis-

fait à (2), il y aura un nombre limité ou illimité de surfaces normales aux courbes (1), mais ne remplissant pas tout l'espace.

Au contraire, quand on se donne une famille de surfaces, cette famille a une équation aux différentielles totales, telle que (2), et, par suite, il existe des trajectoires orthogonales ayant (1) pour équations différentielles.

Cherchons, par exemple, les trajectoires orthogonales de la sphère

$$z^2 + (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 = a^2, \tag{4}$$

qui enveloppe un tore avec un trou infiniment petit. Quand on fait varier φ, a restant constant, l'équation aux différentielles de la surface est

$$(x - a\cos\varphi)\,dx + (y - a\sin\varphi)\,dy + z\,dz = 0,$$

où φ doit être remplacé par sa valeur tirée de (4) ou de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax\cos\varphi + 2ay\sin\varphi. \tag{5}$$

Les équations différentielles des trajectoires sont

$$\frac{dx}{x - a\cos\varphi} = \frac{dy}{y - a\sin\varphi} = \frac{dz}{z}. \tag{6}$$

Les formules (5), (6) s'intègrent en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

elles deviennent alors

$$r^2 + z^2 = 2ar\cos(\theta - \varphi), \tag{7}$$

$$\frac{dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta}{r\cos\theta - a\cos\varphi} = \frac{dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta}{r\sin\theta - a\sin\varphi} = \frac{dz}{z},$$

et les dernières donnent lieu aux suivantes

$$\frac{dr}{r - a\cos(\theta - \varphi)} = \frac{r\,d\theta}{a\sin(\theta - \varphi)} = \frac{dz}{z}$$

ou, en ayant égard à (7),

$$(8)\qquad \frac{2r\,dr}{r^2-z^2}=\frac{2r^2\,d\theta}{\sqrt{4a^2r^2-(r^2+z^2)^2}}=\frac{dz}{z};$$

on tire de là

$$2rz\,dr+(z^2-r^2)\,dz=0,$$

équation homogène qui a pour intégrale

$$2\log\frac{r+z}{r_0+z}+\frac{z-z_0}{r_0}-\log\frac{z}{z_0}=0;$$

on tire de là r en fonction de z, et θ s'obtient en fonction de z au moyen d'une quadrature.

Considérons un point matériel en mouvement : soient x, y, z ses coordonnées ; u, v, w les composantes de la vitesse de ce point à l'époque t. S'il arrive que u, v, w puissent s'exprimer en fonction de x, y, z, de telle sorte que $u\,dx+v\,dy+w\,dz$ soit une différentielle exacte $d\varphi$, ou le devienne par l'application d'un facteur :

1° L'équation $\varphi=$ const. représentera une famille de surfaces;

2° Les équations des trajectoires seront

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt,$$

et les trajectoires du mobile compatibles avec les circonstances initiales pour lesquelles $u\,dx+v\,dy+w\,dz$ est, à un facteur près, une différentielle exacte, seront toutes normales aux surfaces de la famille $\varphi=$ const.

Or les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},\qquad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},\qquad \frac{dw}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z},$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial u},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial v},\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial w};$$

pour les ramener à cette forme, il suffit, en désignant par ω la

fonction des forces, de poser

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \omega;$$

donc il existera des intégrales

$$f = \text{const.}, \qquad g = \text{const.}, \qquad h = \text{const.},$$

donnant lieu aux formules

$$(f, g) = 0, \qquad (g, h) = 0, \qquad (h, f) = 0,$$

et par conséquent rendant $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ différentielle exacte; il suffit pour cela que f, g, h fassent partie d'un système canonique. Cela aura lieu, en particulier, si f, g, h sont les valeurs de x, y, z pour $t = t_0$, puisque l'on sait que les valeurs initiales des variables sont des constantes canoniques.

On peut donc dire que, si un point matériel part d'une position fixe avec des vitesses initiales variables en direction, mais toujours sollicité par les mêmes forces provenant de l'attraction de centres fixes agissant suivant des fonctions de la distance, ce point décrira dans ces circonstances des trajectoires normales à des familles de surfaces.

FIN DU TOME SIXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME VI.

CHAPITRE I.

Équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue.

CHAPITRE II.

Théorie des équations quelconques aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue.

CHAPITRE III.

*Équations aux différentielles totales et équations simultanées aux dérivées partielles.

CHAPITRE IV.

*Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, et équations simultanées.

CHAPITRE V.

*Des équations aux différences finies.

CHAPITRE VI.

*Équations fonctionnelles.

CHAPITRE VII.

*Des fonctions harmoniques.

CHAPITRE VIII.

*Variations des intégrales multiples.

CHAPITRE IX.

Transformation des figures dans l'espace.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DU TOME SIXIÈME.

ERRATA.

Tome IV.

Page.	Ligne.	*Au lieu de*	*Lisez*
123	4	R le rayon de courbure	R le rayon vecteur

Tome V.

Page 110 dernière ligne la formule $\mu - \mu' = \theta - \theta'$ ne répond pas à l'énoncé, par suite un autre problème a été résolu.

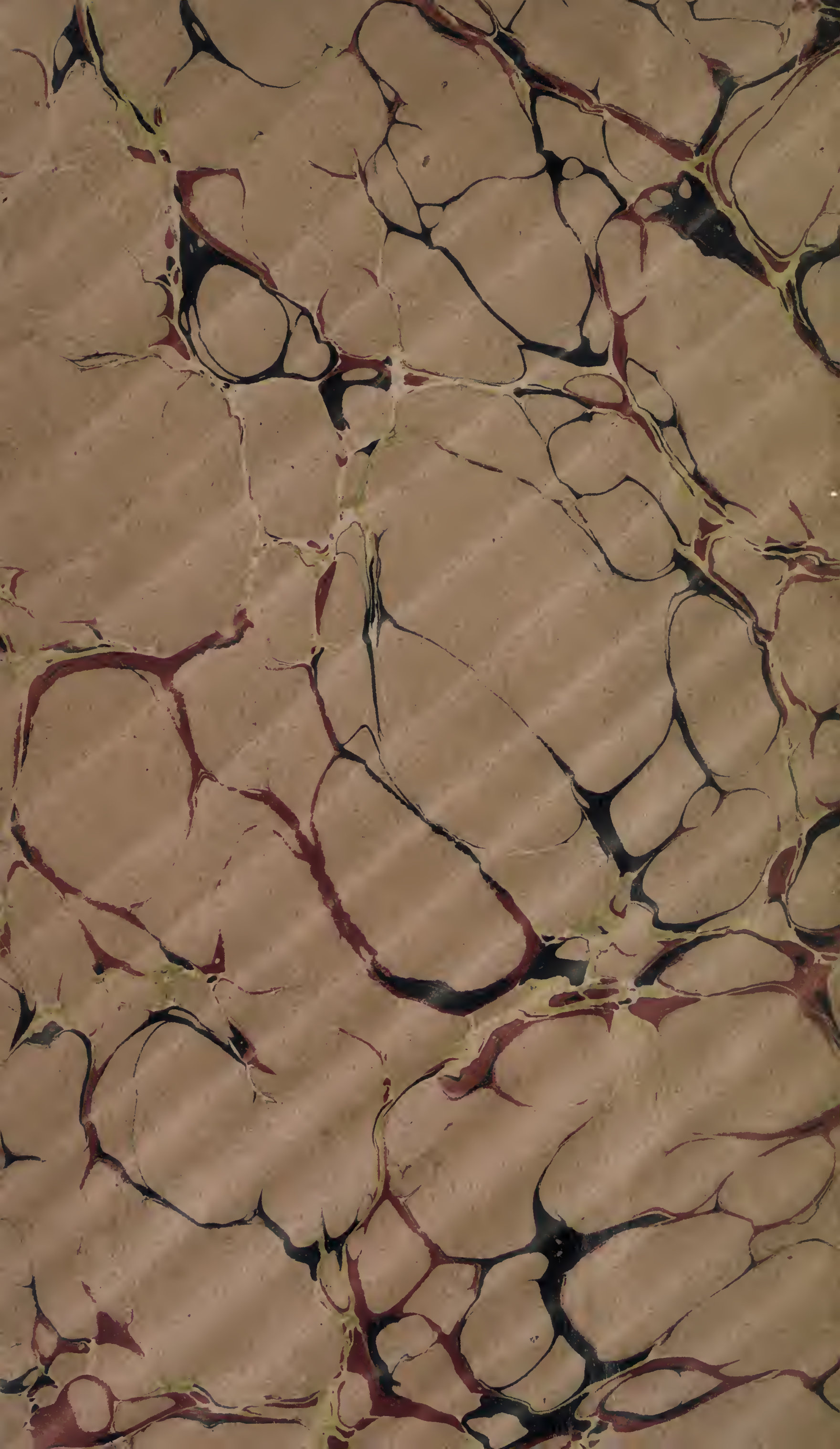
Page 115 dernière ligne ajouter : *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 75 et t. XVII.

Tome VI.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
26	1	λ	1
64	10	$\frac{\partial u}{\partial x}$ '	$\frac{\partial u}{\partial t}$
158	3	$\frac{}{\partial p_\mu}$	$\frac{\partial f}{\partial p_\mu}$
180	6	$\omega. \omega$	ω, ϖ

15221 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.






PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
P&A Sci.

